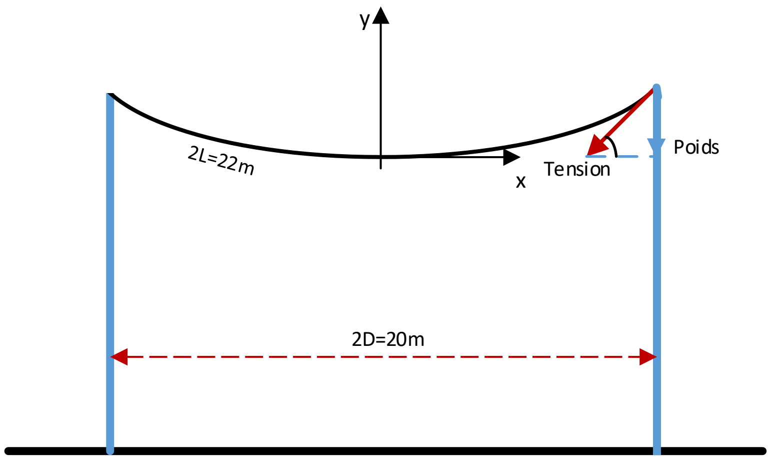
Petit exo de maths d'hypotaupe

Equation d'une chaîne tendue

Mise à jour : 19/09/2017



Enoncé de l'exercice

1. Trouver la forme (l'équation) d'une chaîne tendue entre deux poteaux, accrochée à deux points situés à la même hauteur par rapport au sol.
   Cette équation aura pour paramètres L, D et m définis ci-dessous et supposera une origine des axes au milieu de la chaîne.
2. Application numérique : L=11m ; D=10m ; m=2kgf/m (kgf=kilogrammes-force).
   Calculer :
   - L'équation exacte de la chaîne
   - La hauteur des points d'accrochage
   - La pente de la courbe au point d'accrochage x= 10m
   - La tension de la chaîne en kgf.

Données

- Longueur de la chaîne = 2L ;
- Poids au mètre linéaire = m ;
- Distance entre poteaux = 2D, avec D < L ;

Solution

Calcul de l'équation de la demi-chaîne droite y(x) où $0 \le x \le D$
Considérons un chaînon élémentaire de longueur horizontale dx, hauteur dy.
Soit ds sa longueur. On a (théorème de Pythagore) : $ds^2 = dx^2 + dy^2$

Faisons apparaître la fonction y(x) par sa dérivée en mettant dx^2 en facteur :

$$ds^2 = dx^2[1 + (\frac{dy}{dx})^2], \text{ donc } ds = dx\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

La force verticale due au poids du chaînon qui s'exerce sur lui est : dF = mdS.

La condition qui décrit le poids mL de la demi-chaîne de longueur L est donc :

$$mL = \int_0^D \mathrm{mdx}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}, \text{ c'est-à-dire } L = \int_0^D \mathrm{dx}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

Nous cherchons donc une fonction y(x) qui satisfait cette équation.

L'expression sous le radical ressemble à $1+ sh^2X$, dont la racine est chX.

Une éventuelle solution chX doit être aménagée pour tenir compte du facteur d'échelle des axes, nécessaire car - par exemple - un résultat en mètres n'est pas numériquement égal à sa valeur en yards. Il faut donc chercher une solution en chax, où a est une constante.

La dérivée de chax étant ashax, si on prend la fonction $y(x) = \frac{1}{a}chax$ l'équation devient

$$L = \int_0^D \mathrm{dx\ chax} = \frac{1}{a}shaD.$$

La forme d'une demi-courbe de droite qui convient est donc :

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{a}chax + \textbf{constante } (0 \le x \le D)}$$

(où la constante positionne la chaîne en hauteur par rapport au sol).

Choix de la valeur de a
Il faut donc choisir a (c'est-à-dire l'échelle des axes) tel que $\frac{1}{a}shaD = L$,
c'est-à-dire aD = Argsh aL, équation qu'on ne sait pas résoudre directement.

Condition de possibilité
Si on imagine une recherche graphique de a par intersection des courbes $y_1(a)=aD$ et $y_2(a)=$ Argsh aL on voit qu'en x=0 $y_2(a)$ démarre selon une tangente définie par son développement limité Argshx = x - $x^3/6$ +…, tangente de pente aL.

Pour que la droite $y_1(a)=aD$ rencontre $y_2(a)=$ Argsh aL ailleurs qu'à l'origine, il faut que D < L, c'est-à-dire *une chaîne de longueur 2L plus grande que la distance entre poteaux 2D*, condition remplie par hypothèse (énoncé).

Recherche de a par approximations successives
Données : D=10m ; L=11m

a	Droite y_1=10a	Courbe y_2=Argsh 11a	Comparaison de y_1 avec y_2
0.5	5	2.40	$y_1 > y_2$
0.2	2	1.53	$y_1 > y_2$
0.1	1	0.95	$y_1 > y_2$
0.05	0.5	0.525	$y_1 < y_2$
0.08	0.8	0.794	$y_1 > y_2$
0.065	0.65	0.665	$y_1 < y_2$
0.07	0.7	7.09	$y_1 < y_2$
0.075	0.75	0.752	$y_1 < y_2$
0.077	0.77	0.769	$y_1 > y_2$

On prend donc **a=0.077,** d'où **1/a = 12.99**

Courbe finale de la chaîne
Equation de la demi-chaîne droite : y(x) = $\frac{1}{a} chax$ = 12.99 ch 0.077x + constante
Point le plus bas (x=0) : y(0) = 12.99 + constante choisie égale à -12.99, d'où l'équation finale

y(x) = 12.99 ch 0.077x – 12.99
(où x et y sont mesurés en mètres)**.**

Hauteur du point d'accrochage (x=10) : y(10) = 12.99 ch(0.77) – 12.99 = **4.04m** au-dessus du point le plus bas.

Pente de la courbe à son extrémité x=10m
La dérivée y'(x) de l'équation y(x) = $\frac{1}{a} chax$ + constante étant y'(x) = shax :
y'(10) = sh(0.77) = **0.848**, tangente d'un angle de 40.3° dont le sinus est 0.647.

Tension de la chaîne
La tension T en kgf est égale à la moitié du poids de la chaîne Lm divisée par 0.647 :
Avec m = 2kgf/m, Lm=22kgf et Lm/0.647 = **34kgf.**