2.4.21 Métrique d'un corps sphérique en rotation sur lui-même

La Métrique de Schwarzschild décrit la déformation de l'espace-temps vide due à une masse ponctuelle ou sphérique *M* immobile. Nous décrivons ci-dessous les métriques de corps en rotation sur eux-mêmes, comme les trous noirs formés par absorption d'un disque d'accrétion tournant.

2.4.21.1 Solution en champ faible pour une sphère en rotation lente

<u>Domaine d'application</u>

Cette solution de l'équation d'Einstein s'applique aux corps à symétrie sphérique tournant lentement sur eux-mêmes, comme les planètes. Elle suppose aussi que les distributions de masses du corps sont invariantes dans le temps malgré la rotation : le corps est alors qualifié de *stationnaire* et la métrique est indépendante du temps.

<u>Métrique</u>

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{R}\right)(dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 sin^2\theta \, d\phi^2) - \frac{4GMa}{R} sin^2\theta \, d\phi \, dt$$

(Champ Faible)

où :

- ***R*** (vecteur) désigne la position où on évalue le champ, *R* (scalaire) étant sa distance à l'origine ;
- *M* est la masse totale du corps ;
- *a = S/M* est le moment cinétique par unité de masse du corps.

2.4.21.2 Métrique de Kerr

<u>Domaine d'application</u>

La solution (Champ Faible) précédente convient pour des corps proches de planètes ou d'étoiles ordinaires en rotation, mais elle ne s'applique pas aux corps dont le champ gravitationnel est fort, comme les trous noirs ou les étoiles à neutrons. La solution générale, applicable aux champs gravitationnels forts et aux rotations rapides est la Métrique de Kerr ci-après.

<u>Métrique de Kerr en coordonnées de Boyer-Lindquist</u>

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GMr}{r^2 + a^2cos^2\theta}\right)dt^2 + \left(\frac{r^2 + a^2cos^2\theta}{r^2 - 2GMr + a^2}\right)dr^2 + (r^2 + a^2cos^2\theta)d\theta^2$$
$$+\left(r^2 + a^2 + \frac{2GMra^2sin^2\theta}{r^2+a^2cos^2\theta}\right)sin^2\theta \, d\phi^2 - \left(\frac{4GMRa \, sin^2\theta}{r^2+a^2cos^2\theta}\right)d\phi \, dt,$$

où :

- les variables *t, r, θ* et *Φ* sont le système de coordonnées de Kerr (1963) ;
- *M* est (comme ci-dessus) la masse du corps ;
- *a* est (comme ci-dessus) le moment cinétique *S/M* par unité de masse du corps ;
- dans le système de coordonnées RG la dimension de *GM* est une longueur.

Importance de la solution de Kerr

- C'est une solution exacte de l'équation d'Einstein dans le vide qui entoure tout astre massif compact, notamment les trous noirs ;
- Cette solution s'applique à n'importe quel objet sans charge électrique, à symétrie sphérique et propriétés indépendantes du temps ;
- C'est la seule géométrie possible à l'extérieur d'un trou noir formé à partir de matière sans charge électrique [B188].

  On a démontré que lorsqu'une distribution de masse non sphérique s'effondre en trou noir, la complexité non sphérique du champ gravitationnel est rayonnée vers l'extérieur sous forme d'ondes gravitationnelles, laissant derrière elles un champ gravitationnel décrit par la géométrie de Kerr.
- Les astres qui s'effondrent en trous noirs ont presque toujours un moment cinétique non nul. Ce moment cinétique est même tel que pratiquement tous les trous noirs formés ont $a \approx GM$. [B189]
- Il est probable qu'un trou noir ne peut pas se former avec un moment cinétique trop élevé $a \geq GM$, la formation entraînant alors une éjection de matière. Les trous noirs formés par effondrement finissent presque toujours avec $a \approx GM$.
- Il est probable aussi que toute galaxie a un ou plusieurs trous noirs géants (des millions ou milliards de masses solaires) en leur centre.
- Les disques d'accrétion autour des trous noirs de certaines galaxies constituent la source d'énergie des quasars.

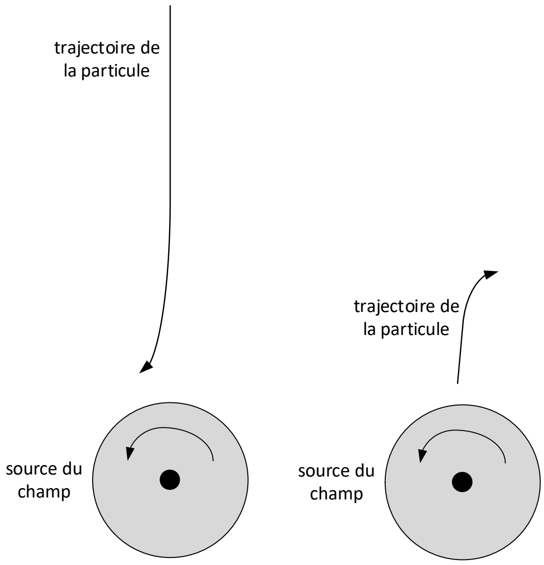
2.4.21.3 Déviation d'une particule par un objet en rotation

Entraînement des référentiels inertiels

Considérons une particule dans le plan équatorial d'un objet sphérique en rotation qui tombe en chute libre vers lui. Sa trajectoire est alors celle du dessin de gauche ci-dessous : elle est déviée dans le sens de la rotation de l'objet.

Mais si, tout en restant dans le plan équatorial, la particule s'éloigne de l'objet, sa trajectoire sera déviée dans le sens opposé à celui de la rotation (dessin de droite). Ce sens contre-intuitif est bien celui que donnerait l'application de la règle des « trois doigts de la main gauche » de l'électromagnétisme ; *on ne doit pas considérer qu'un objet en rotation entraîne la géométrie de l'espace-temps par une sorte de friction*.

Cet effet est appelé *entraînement des référentiels inertiels*.



2.4.21.4 Hypothèse de la censure cosmique

Source : [B4] pages 249 et 443

L'équation $r_+ = GM + \sqrt{(GM)^2 - a^2}$ (où *a(t)* est le facteur d'échelle) n'a pas de solution pour *a* > *GM*, cas dans lequel il n'y a plus d'horizon. Or il se trouve que l'espace-temps de Kerr a une vraie singularité géométrique, un endroit où sa courbure est infinie (comme *r = 0* dans l'espace de Schwarzschild).

> Si *a* > *GM* était physiquement possible il n'y aurait pas d'Horizon des événements entourant cette singularité, et un observateur extérieur pourrait théoriquement s'y rendre et la décrire aux observateurs lointains, ce qui poserait des problèmes philosophiques complexes de causalité.

En 1969, Roger Penrose a donc proposé de postuler une « censure cosmique » :

> **L'effondrement gravitationnel d'une distribution de masse physiquement raisonnable ne peut produire une telle singularité nue (non entourée d'un horizon des événements).**

Cette hypothèse n'est ni démontrée, ni infirmée. Des calculs montrent qu'un espace-temps de Kerr avec *a* > *GM* serait instable : il rayonnerait spontanément des ondes gravitationnelles jusqu'à ce que *a* < *GM* ; un objet avec *a* > *GM* se disloquerait en s'effondrant, avant de former un trou noir.

Faute d'une meilleure hypothèse, on admet donc le postulat de censure cosmique :

> **Tous les trous noirs astrophysiques vérifient a < GM et leurs singularités sont entourées d'un Horizon des événements.**

2.4.21.5 Particules et trajectoires d'énergie négative

2.4.21.5.1 Energie négative en physique

Pour représenter correctement leur phénomène, certaines formules de physique ont besoin d'une énergie négative. Exemples :

- Les calculs de Mécanique quantique de Paul Dirac qui ont suggéré l'existence d'une antiparticule de l'électron, le positron, lui attribuaient une énergie négative.

- Le modèle atomique attribue aux électrons négatifs tournant autour du noyau positif des énergies potentielles négatives, pour rendre compte de ce que :
  - l'énergie potentielle à l'infini d'un électron d'atome est définie comme nulle ;
  - en s'approchant du noyau qui l'attire, l'électron a transformé de l'énergie potentielle en énergie électromagnétique : un photon a été émis.
    L'énergie positive de ce photon se déduisant de l'énergie potentielle nulle de l'électron à l'infini, l'énergie potentielle de l'électron est devenue négative.

  Ainsi, l'électron de la couche stable *n=1* de l'hydrogène a une énergie potentielle de -13.6eV.

- Dans l'équation (ENEL) du paragraphe *Surface de décalage de la lumière vers le rouge infini*, l'énergie à l'infini par unité de masse d'une particule libre de l'ergorégion peut être négative : elle y restera alors et tombera nécessairement dans le trou noir en traversant son Horizon des événements.

  Seules les particules confinées dans l'ergorégion d'un trou noir en rotation (voir *Métrique de Kerr*) peuvent avoir une énergie négative.

- L'énergie potentielle d'un champ de gravitation est négative. [B176] pages 289, 290… l'explique (schématiquement) en montrant que la création d'un champ dans une région de l'espace où il était nul produit une énergie récupérable, rendant donc négative l'énergie potentielle de la région.

  L'énergie potentielle négative d'une planète, due à la gravité, provient d'une diminution de la masse totale de la matière de l'espace qui y est rassemblée, masse qui était un peu plus grande avant sa formation qu'après. L'énergie perdue s'est transformée en chaleur de la planète et rayonnement émis.

  L'énergie potentielle d'un champ de gravitation est stockée dans le champ lui-même sous forme d'une *densité d'énergie proportionnelle au carré de l'intensité du champ* ([B176] page 10) :
  - Quand on soulève une masse, l'énergie dépensée s'ajoute à celle du champ de gravitation de la pesanteur ;
  - L'énergie de l'Univers comprend la somme des énergies de tous ses champs de gravitation.
  - L'application du *Principe de conservation de l'énergie* d'un système fermé doit tenir compte de l'énergie gravitationnelle.

- Lorsqu'une fluctuation d'énergie crée un couple particule-antiparticule à partir de l'énergie du vide d'un point *P* de l'espace, il reste à la place du couple un « trou » d'énergie négative. Ce trou est très vite comblé par l'énergie restituée par la fusion des particules du couple, sauf peut-être dans le cas d'un trou noir où la particule positive émise à l'extérieur de l'horizon arrive à s'échapper et laisse la particule négative aller vers la singularité qui l'attire.

2.4.21.5.2 L'Univers a peut-être été créé à partir de rien !

Lire d'abord en annexe au paragraphe *Energie* le sous-titre *Principe de conservation de l'énergie*.

Sources : [B176] page 12 et [B200].

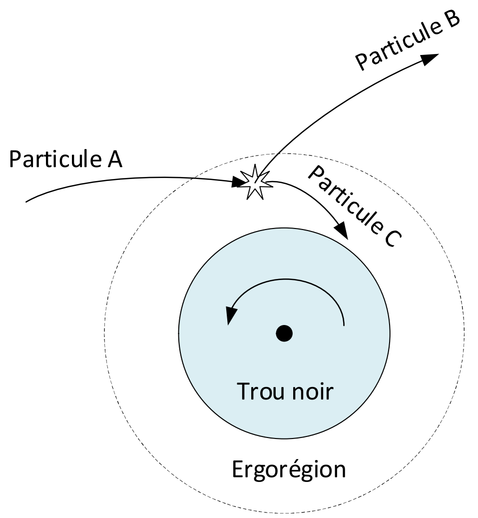
Compte tenu de l'existence de l'énergie gravitationnelle négative, il est possible que l'énergie totale de l'Univers (gravitation + rayonnement + masse - dont matière noire et énergie noire) soit nulle : on ne peut ni le démontrer, ni prouver que c'est faux. L'Univers aurait alors été créé à partir de rien sans contredire le *Principe de conservation de l'énergie* ; il n'y a pas de limite à la densité d'énergie d'un champ de gravitation, et aucune limite à son énergie totale.

2.4.21.5.3 Processus d'extraction d'énergie d'un trou noir de Penrose

Source : [B4] pages 452-453

Dans le diagramme ci-dessous, une particule *A* d'énergie positive, extérieure à l'ergorégion d'un trou noir en rotation, y pénètre et s'y décompose. Cette décomposition engendre :

- Une particule *B* d'énergie positive à l'infini *supérieure à celle de A*, qui sort de l'ergorégion et dont on pourrait théoriquement récupérer l'énergie ;
- Une particule *C* d'énergie négative, qui reste dans l'ergorégion et tombe dans le trou noir.



Tombant dans le trou noir, l'énergie négative de *C* diminue l'énergie (positive) de ce trou, donc aussi sa masse ; et la particule *C* ajoute son moment cinétique négatif à celui (positif) du trou noir, qui diminue donc.

Imaginé par Roger Penrose, ce processus permet théoriquement d'extraire de l'énergie d'un trou noir en rotation, à la fois en jouant sur sa masse et sur son moment cinétique.

<u>Masse irréductible d'un trou noir à qui on soustrait de l'énergie</u>

En le répétant un certain nombre de fois, ce processus finirait par arrêter la rotation du trou noir, dont la métrique serait alors « de Schwarzschild », et la possibilité d'extraction d'énergie cesserait car elle est liée à sa rotation. Le calcul montre que de telles extractions ne peuvent réduire à néant la masse d'un trou noir en rotation : elles peuvent tout au plus arrêter cette rotation, réduisant la masse du trou noir à une valeur irréductible :

$$M_{ir} = \frac{\sqrt{2GMr_+}}{2G} \quad o\text{ù } r_+ = GM + \sqrt{(GM)^2 - a^2}$$