2.4.15.5 Quantités conservées le long des trajectoires géodésiques

1 - Energie relativiste par unité de masse d'un objet à l'infini, notée "e"

Le tenseur de la métrique de Schwarzschild est une matrice diagonale : seuls sont non-nuls les $g_{\mu\nu}$ tels que $\mu = \nu$. Comme la métrique est en outre indépendante du temps, l'équation des géodésiques qui s'écrit :

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) - \frac{1}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(g_{tt}\frac{dt}{d\tau}\right) + 0 \text{ d'où constante} = -g_{tt}\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = e$$

La quantité *e* est donc conservée le long des trajectoires géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild, donc pour un corps en chute libre se déplaçant le long d'une géodésique. Cette quantité est *l'énergie relativiste par unité de masse que l'objet aurait à l'infini* (définie dans *Energie et quantité de mouvement relativistes, et leur conservation*). Elle est négative pour r < 2GM, c'est-à-dire à l'intérieur de ce que nous appelons *sphère horizon du trou noir* (voir plus bas *Rayon de Schwarzschild*).

2 - Moment cinétique relativiste par unité de masse d'un objet, noté "l"

Par un raisonnement analogue au précédent :

$$\text{constante} = g_{\Phi\Phi}\frac{d\Phi}{d\tau} = r^2 sin^2\theta\frac{d\Phi}{d\tau} = l$$

La quantité *l* est donc aussi conservée le long des trajectoires géodésiques dans l'espace-temps de Schwarzschild. Pour une trajectoire contenue dans le plan équatorial : $sin^2\theta = 1$ et $l = r^2(d\Phi/d\tau)$ est le *moment cinétique relativiste par unité de masse*.

Le moment cinétique par unité de masse d'un objet en chute libre est donc conservé.

Remarques sur les trajectoires géodésiques dans l'espace de Schwarzschild

- Par raison de symétrie, *toutes ces trajectoires doivent être planes*. On peut donc choisir des axes de référentiel où le plan de ces trajectoires est le plan équatorial $\theta = \pi/2$, ce qui simplifie l'expression des résultats.
- A partir de l'équation des géodésiques pour la métrique de Schwarzschild on peut retrouver la troisième loi de Kepler :

  Les carrés des durées de révolution autour du Soleil sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites correspondantes.

  En appelant $\Omega = d\Phi/dt$ la vitesse angulaire d'un corps décrivant une trajectoire géodésique autour de la masse M du Soleil, le calcul montre que :

  $$\Omega^2 = \frac{GM}{r^3}$$

  Exemple

  L'orbite quasi-circulaire de la planète géante Jupiter a un rayon moyen de 778 millions de km, alors que l'orbite de la Terre (parcourue en 1 an) a un rayon de

149.6 millions de km. $(778/149.6)^3 = 140.6$, qui a pour racine carrée 11.86 : l'« année » jovienne (révolution sidérale) dure 11.86 années terrestres.

2.4.15.6 Précession du périhélie des orbites des planètes

Définition

Le périhélie de l'orbite d'un astre du système solaire (planète, astéroïde, comète…) est le point de sa trajectoire elliptique le plus proche du Soleil.

Résumé du problème de l'orbite de Mercure

On a constaté au XIXe siècle que le périhélie de la planète Mercure, la plus proche du Soleil, se déplace d'environ 572 secondes d'arc par siècle, alors que les équations de Newton en expliquent 529 : ce périhélie se déplace donc de 43 secondes par siècle de plus que prévu. La différence ne fut expliquée que par la Relativité générale d'Einstein, publiée en 1915.

Voir d'abord *Lois du mouvement et de la gravitation universelle de Newton*.

Selon la 1ère loi de Kepler (conséquence de la 2ème loi de Newton) :

> **Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil est un foyer**.

Une ellipse étant une courbe plane fermée, la planète revient à une position particulière après une période fixe, *l'année sidérale*, selon le tableau ci-dessous, où :

- 1 UA (unité astronomique) = 149 700 000 km est la distance Terre-Soleil ;
- 1 AT (année terrestre) = 365.2425 jours ;
- 1 MT (masse terrestre) = $5.97 \cdot 10^{24}$ kg (1/330 000ème de la masse du Soleil).

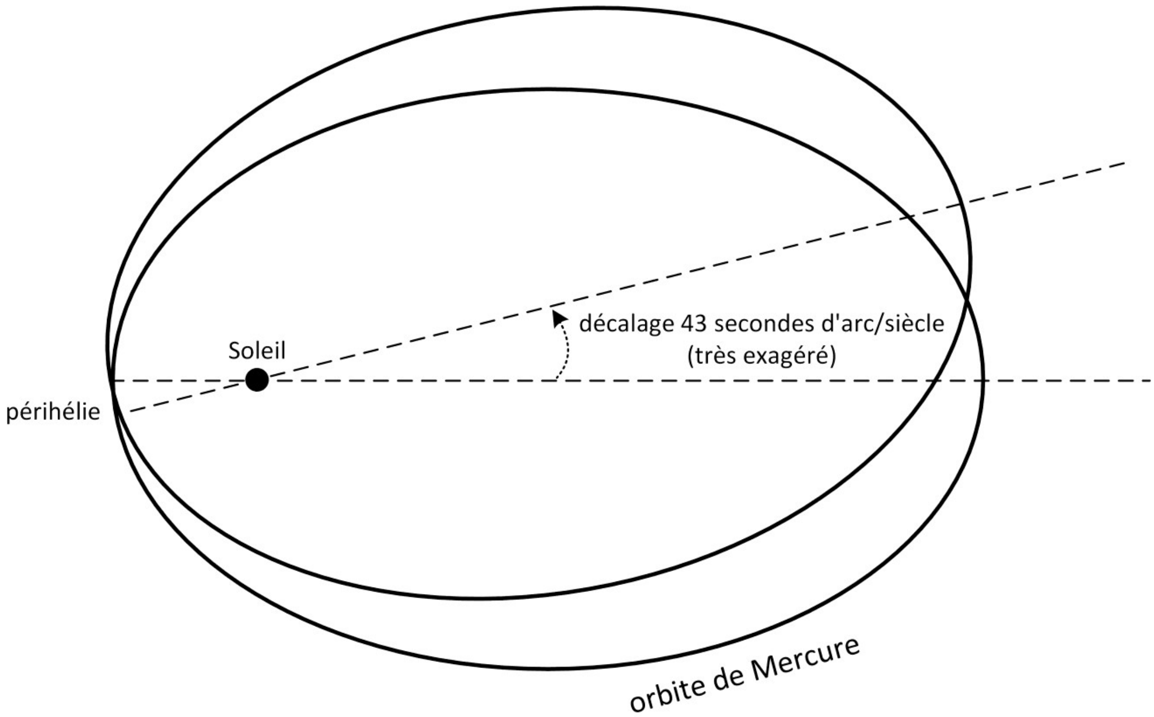
Planète	Masse en MT	Distance moyenne du Soleil en UA	Durée de l'année sidérale en AT
Mercure	0.055	0.4	0.24
Vénus	0.82	0.7	0.62
Terre	1	1	1
Mars	0.11	1.5	1.88
Jupiter	320	5.2	11.86
Saturne	95	9.5	29.4
Uranus	14.5	19.2	84
Neptune	17	30.1	164

Masses et orbites des planètes

Le paradoxe de l'orbite de Mercure

Une orbite elliptique est une courbe ayant deux foyers symétriques par rapport à son centre. Elle est telle que tout point *P* de cette orbite a une somme des distances aux foyers qui est constante.

On sait depuis le milieu du 19e siècle que l'orbite de Mercure n'est pas une courbe fermée. On a attribué cette anomalie à des perturbations causées par l'attraction de planètes plus grosses, mais sans expliquer suffisamment pourquoi l'axe de l'ellipse de Mercure (joignant le Soleil au périhélie) tourne de 43 secondes d'arc par siècle.



Explication relativiste qualitative du phénomène

Lorsque la planète parcourt la portion de son orbite voisine du périhélie elle est soumise à une attraction plus forte que sur le reste de son orbite, attraction qui entraîne une plus grande déformation de l'espace, ralentit le temps et rend l'approximation newtonienne des paramètres du mouvement insuffisamment précise.

Explication mathématique

Voir ci-dessus *Quantités conservées le long des trajectoires géodésiques*.

La constante *l* (moment cinétique relativiste par unité de masse) vaut ici $l = r^2 \frac{d\Phi}{d\tau}$.

En posant $u = \frac{1}{r}$, l'équation relativiste de l'orbite devient $\frac{d^2u}{d\Phi^2} + u = \frac{GM}{l^2} + 3GMu^2$ alors que l'équation newtonienne est $\frac{d^2u}{d\Phi} + u = \frac{GM}{l^2}$: on voit qu'il lui manque le terme $3GMu^2$.

L'équation relativiste ci-dessus n'ayant pas de solution analytique, on trouve une solution approchée par calcul de perturbation à partir d'une orbite circulaire de rayon

r_c. Ce calcul montre qu'à chaque « tour » (année mercurienne) la planète parcourt un angle $2\pi + \frac{6\pi GM}{r_c}$, d'où un angle de précession de $\frac{6\pi GM}{r_c}$ qui explique les 43 secondes constatées.

Quand Einstein publia sa théorie, en novembre 1915, cette explication fut le premier succès de la Relativité générale.