1.8.5.2.8 Diagramme des bifurcations - Universalité - Constante de Feigenbaum

Nous avons vu que la période de la fonction logistique (nombre de valeurs formant un groupe répétitif après un grand nombre d'itérations) dépend de la valeur du paramètre *r*. Un programme simple MAPLE [B113] permet de représenter graphiquement l'ensemble des valeurs finales de la fonction logistique en fonction de *r*.

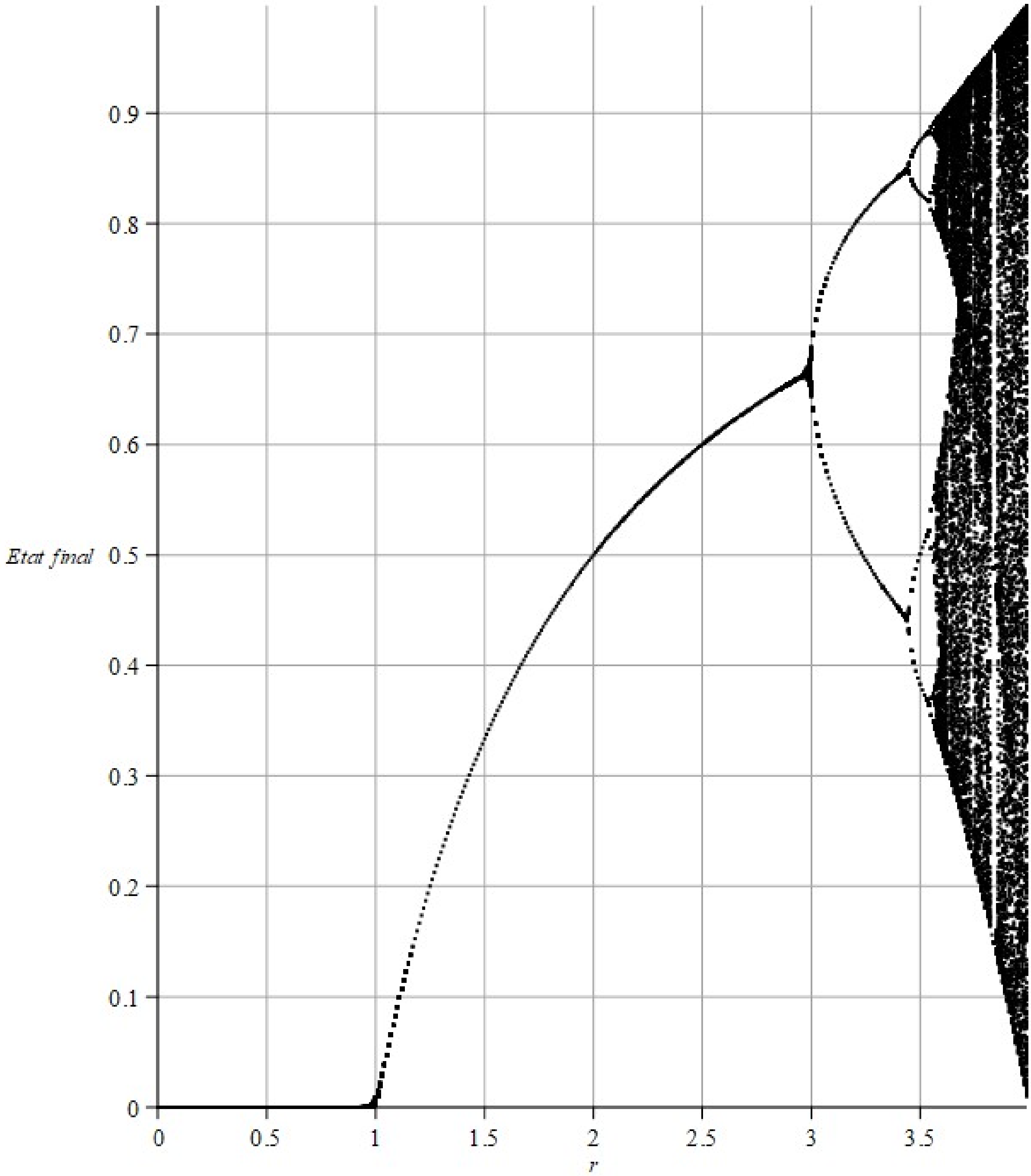


Diagramme des bifurcations : état final de la fonction logistique en fonction de *r*

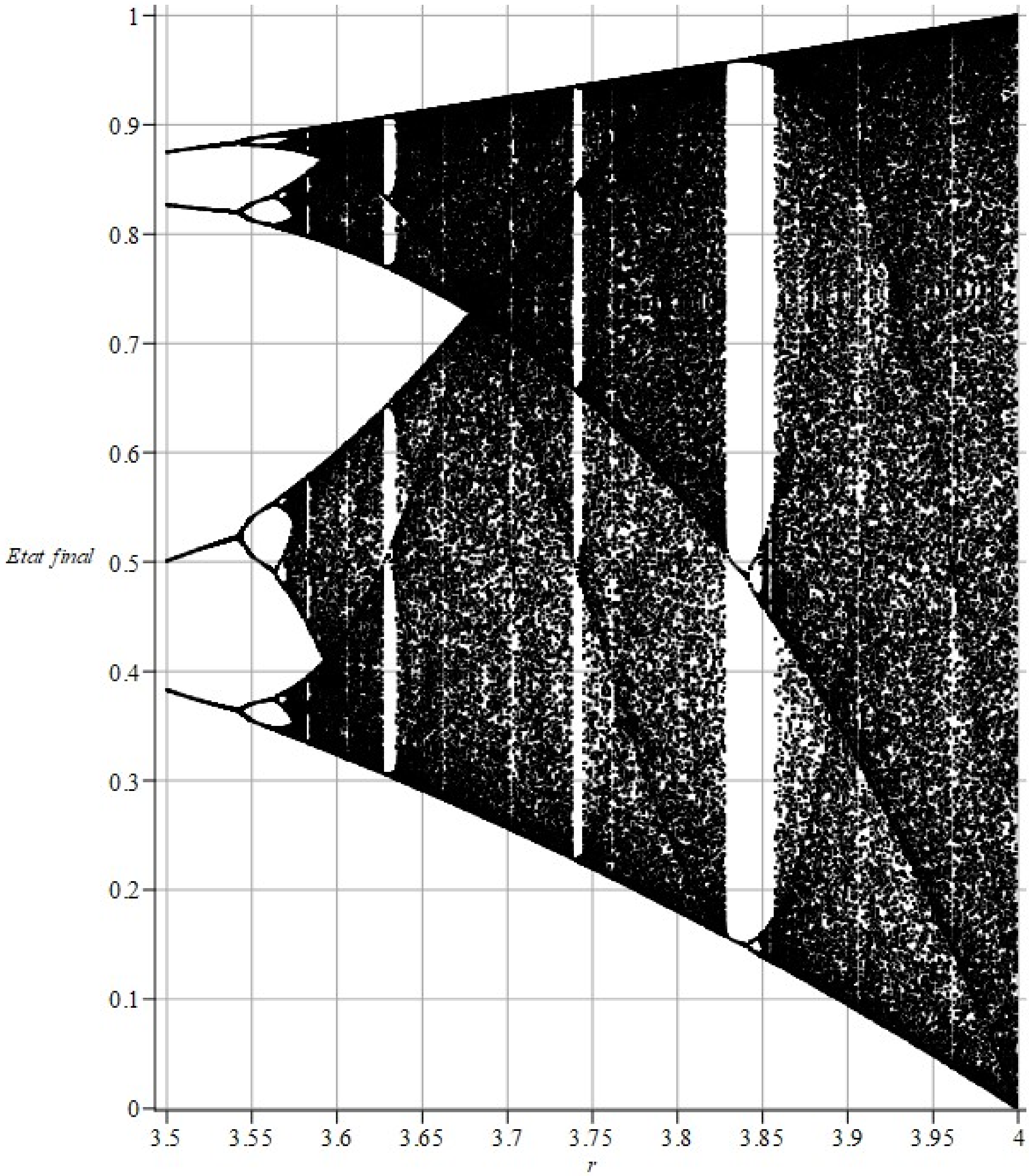
Remarques

- Pour $0 \leq r \leq 1$, la valeur finale est zéro.

- Pour $1<r<3$, il y a une seule valeur finale.
- Pour $3 \leq r<3.46$ environ, il y a une période de deux valeurs finales.
- Pour $3.46 \leq r<3.544$ environ, il y a une période de quatre valeurs finales.
- Pour $3.544 \leq r<3.5644$ environ, il y a une période de huit valeurs finales.
- Pour r>3.5644 il y a une courte période de seize valeurs finales, jusqu'à environ *3.5687* où commence une période de 32 valeurs.
- Les plages de valeurs associées à une périodicité sont de plus en plus courtes quand celle-ci croît. Cette suite de doublements est interrompue par le fait que pour $r=3.84$, il y a une période de trois valeurs dans une sorte de « fenêtre ».
- Pour $r=4$, l'état final est apériodique : il y a une infinité d'états distincts quel que soit le rang de l'itération d'observation considéré, chaque état n'étant atteint qu'une fois.

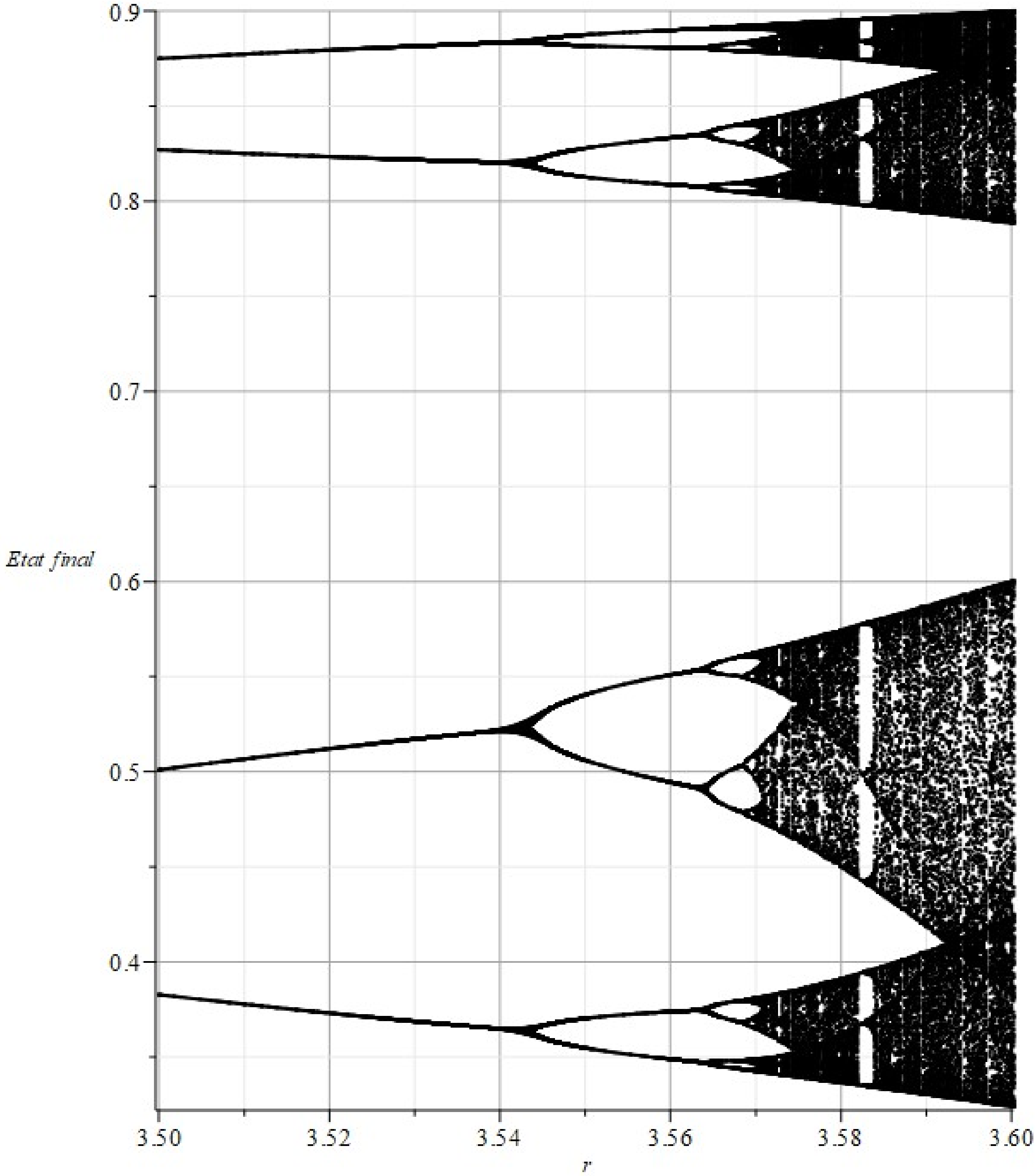
Pour les systèmes dynamiques évoluant comme la fonction logistique, la situation chaotique apparaît vers $r=3.57$, et le maximum de sensibilité aux conditions initiales se produit pour $r=4$.

Examinons les états finaux produits par *3.5≤r<4* :



Bifurcations de la fonction logistique : 1er agrandissement

Il est aussi intéressant d'examiner en détail les états finaux produits par $3.5 \leq r < 3.6$:

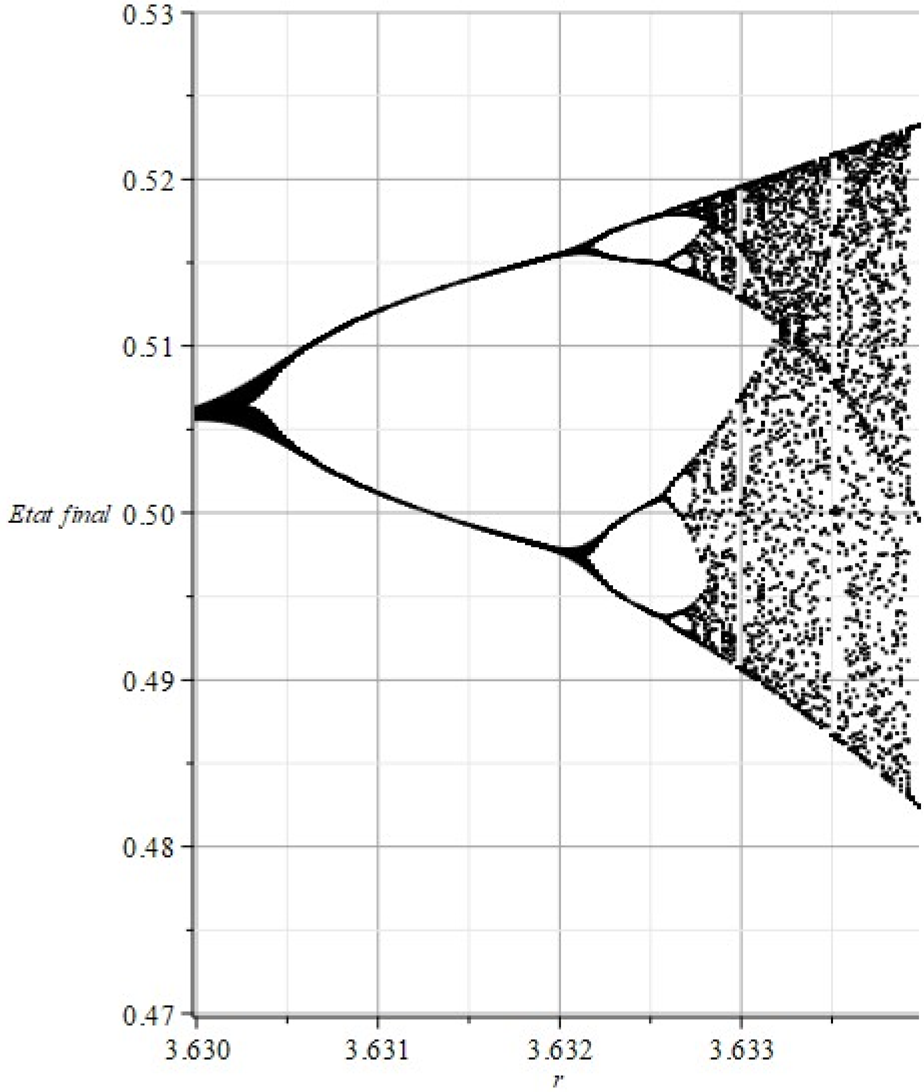


Bifurcations de la fonction logistique : 2ème agrandissement

On voit un certain nombre de bifurcations, la période passant de 4 à 8, puis à 16 : il y a un phénomène de *doublement des périodes successives*.

> Ce phénomène existe pour un grand nombre de fonctions d'évolution par itération, existence qui relève de leur *universalité* (caractère défini plus bas).

En agrandissant le diagramme de bifurcation entre 3.630 et 3.634, et en limitant l'affichage aux seuls états finaux entre 0.47 et 0.53, on obtient ceci :



Bifurcations de la fonction logistique : 3ème agrandissement

Le diagramme ci-dessus ressemble aux précédents, malgré une résolution plus fine : *les bifurcations de la fonction logistique ont donc une structure fractale*.

Le doublement des périodes successives par bifurcation ne se poursuit pas indéfiniment, il apparaît des fenêtres chaotiques. Dans une telle fenêtre, on trouve des valeurs où la période change brusquement, par exemple celle à 3.84 où la période est 3. Les plages de forte sensibilité aux conditions initiales contiennent des valeurs apériodiques. Chaque plage contenant une valeur chaotique contient aussi une fenêtre périodique…

<u>Prédictibilité de l'évolution d'un système dynamique</u>

Au vu de cet exemple on peut conclure que le déterminisme d'une fonction permet la *prévision* de son évolution, mais pas la *prédiction* fiable de ses valeurs à long terme. De telles prédictions ne sont possibles qu'en effectuant les calculs d'itération nécessaires, et elles sont perturbées par une sensibilité aux conditions initiales.

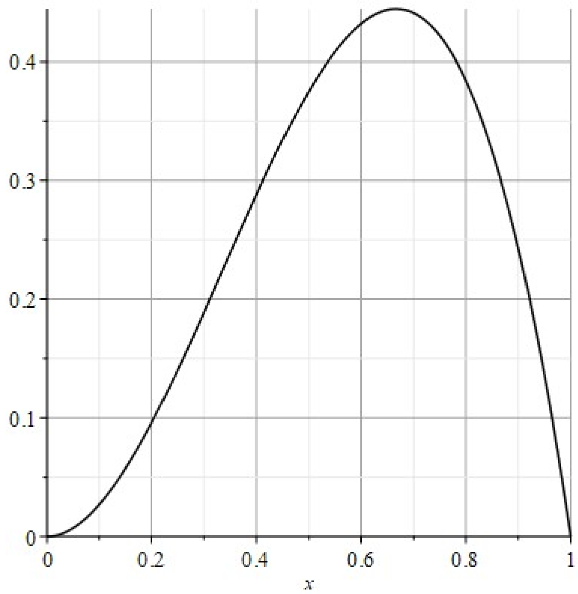
Un changement d'échelle révèle par agrandissement des détails de structure déjà notés aux résolutions plus faibles, caractéristique des systèmes dynamiques chaotiques dont nous reparlerons à propos des *fractales*.

1.8.5.2.9 Constante universelle de Feigenbaum et doublement périodique vers le chaos

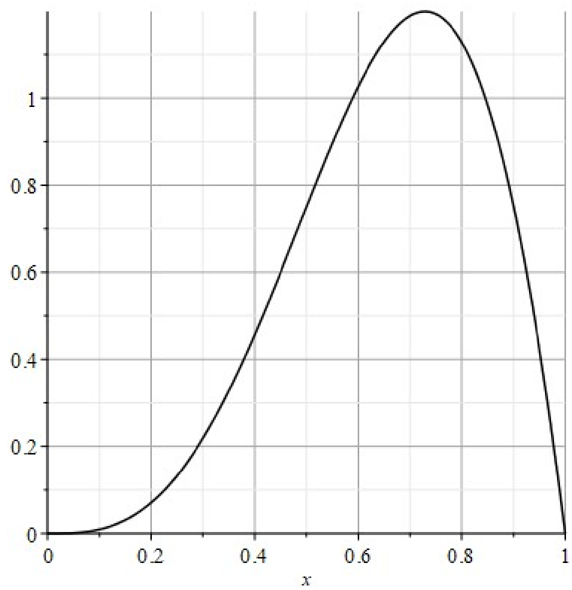
Nous avons constaté plus haut que la plage (l'intervalle) de valeurs de *r* du diagramme de bifurcation correspondant à une certaine périodicité rétrécit lorsque la périodicité croît par doublement lors d'une bifurcation. Pour de nombreuses fonctions d'itération cette décroissance (le rapport des longueurs de deux plages successives) tend toujours vers le nombre

$$\delta = 4.669201\ldots$$

Ce nombre est appelé *constante de Feigenbaum*, parce qu'on le retrouve dans les diagrammes de bifurcation d'un grand nombre d'autres fonctions itérées ; exemples :



$y = 3x^2(1-x)$



$y=3x^2\sin(\pi x)$

Complément intéressant sur les nombres de Feigenbaum : voir [B243].

<u>Universalité de la constante δ de Feigenbaum : caractéristiques</u>

Toutes les fonctions dont :

- L'itération présente des rapports d'intervalles successifs de *r* décroissants se terminant par une valeur chaotique (*r=4.0* pour la fonction logistique) ;
- La courbe a, dans l'intervalle de *x* considéré pour les itérations ($0 \leq x \leq 1$ pour la fonction logistique), un seul maximum (*x=0.5* pour la fonction logistique) et une allure parabolique semblable à celle de la fonction logistique $y = rx(1-x)$,

voient la suite de ces rapports tendre vers δ, *toujours le même* δ.

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}}$$

Ce phénomène d'universalité a été appelé *doublement périodique vers le chaos*.

1.8.5.2.10 Doublement périodique vers le chaos

Ce phénomène a les *Propriétés d'écartement et de rapprochement* citées dans le paragraphe portant ce nom :

- *Séparation de deux états initiaux proches par sensibilité aux conditions initiales ;*
- *Rapprochement de deux états successifs d'une évolution :*

  Tout intervalle de valeurs d'états successifs $|x_{n+1}-x_n|$ d'une évolution finira par se contracter. L'évolution tendra vers l'attracteur, qui doit avoir un volume nul dans un espace des phases à trois dimensions.

<u>Conditions d'un doublement de période</u>

Dans un système dynamique donné, la variation d'un paramètre (comme le *r* de la fonction logistique) peut changer la fin $t \to \infty$ de l'évolution par itérations en lui faisant franchir un point de bifurcation, doublant ainsi sa périodicité ; nous en avons vu plusieurs exemples.

> Une variation de paramètre de ce type se produit, par exemple, dans l'écoulement d'un fluide dont le *nombre de Reynolds* (voir *Turbulence*) varie avec la vitesse d'écoulement. Au franchissement par croissance d'une valeur de ce nombre correspondant à une bifurcation la période double, le régime d'écoulement change, des tourbillons peuvent brusquement apparaître ou se multiplier ; après un certain nombre de bifurcations, l'écoulement devient apériodique, c'est-à-dire turbulent. Une telle croissance de la vitesse d'écoulement du fluide survient, par exemple, lorsqu'il doit contourner un obstacle, comme l'eau d'une rivière tranquille qui devient turbulente en contournant une pierre ou en franchissant un rétrécissement de son lit.

L'imprécision des calculs peut masquer des réalités mathématiques

Nous avons au paragraphe *Ensembles de Mandelbrot* des exemples de la possibilité de découvrir des détails d'un objet fractal même à des échelles minuscules ; nous avons vu aussi en étudiant la fonction logistique qu'il y a parfois de petites différences du paramètre *r* qui entraînent des différences considérables d'évolution, par exemple par franchissement d'une bifurcation.

Or, quelle que soit la précision d'un calcul

> (on peut, par exemple, calculer avec une précision de 100 décimales avec le logiciel mathématique Maple par l'instruction *evalf [100] (π),* qui produit :
> π = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944
> 592307816406286208998628034825342117068)

il peut arriver, après un certain nombre d'itérations, que l'imprécision inévitable du programme masque un détail de résultat, par exemple le franchissement d'une bifurcation ou le saut d'un côté à un autre d'un attracteur à deux corbes.

En outre, la précision des valeurs des grandeurs physiques d'un système dynamique a elle-même une limite…

Exemples d'application de la constante de Feigenbaum

La constante de Feigenbaum δ apparaît, par exemple, dans la fonction de calcul du débit d'un robinet coulant goutte à goutte en fonction du nombre de gouttes par minute, fonction présentant (lorsque le débit croît) un doublement de périodes successives se terminant par un régime apériodique de chaos.

Le doublement périodique vers le chaos apparaît aussi dans des phénomènes de mouvements de convection de fluides soumis à des différences de température, dans des réponses de circuits électroniques oscillants, etc.: voir [B20]

Prédictibilité des périodes successives grâce à la constante de Feigenbaum

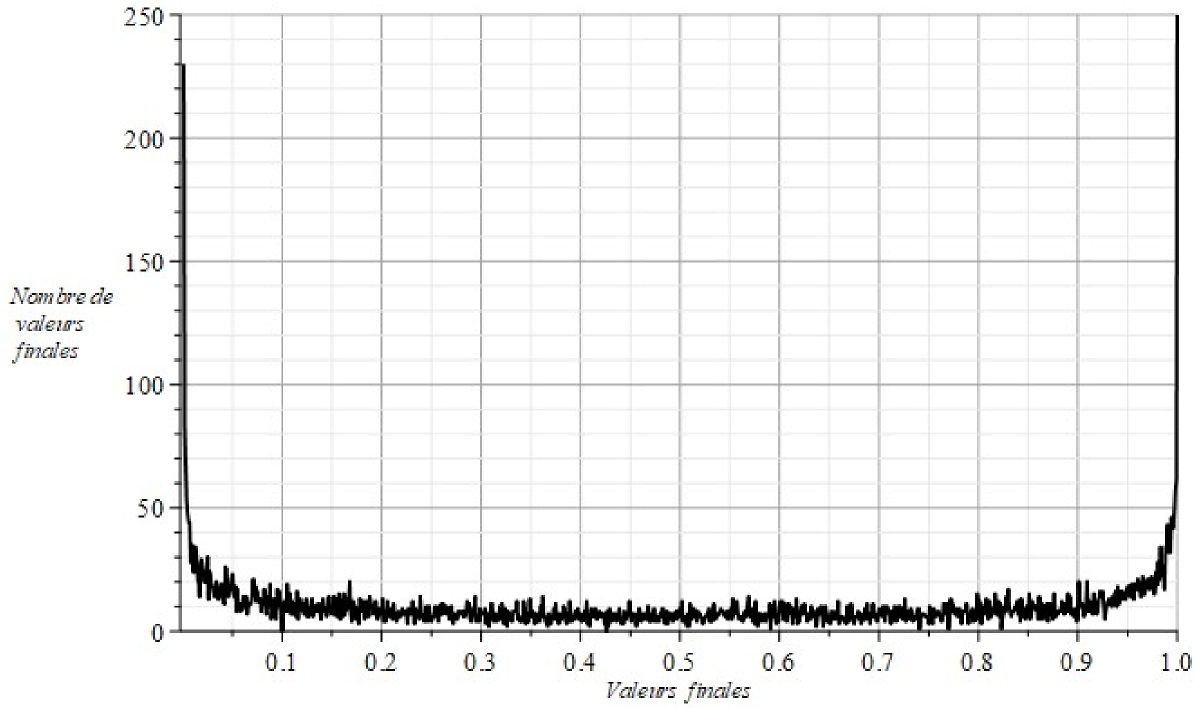
Il y a beaucoup de systèmes dynamiques dont l'évolution d'une variable x peut être confinée à l'intervalle $0<x<1$ par un simple changement de variable, et qui ont dans cet intervalle l'allure parabolique citée sous le titre *Universalité de la constante δ de Feigenbaum : caractéristiques*.

Pour un tel système, même si on ne connaît pas la fonction d'évolution précise, on peut prédire la suite des conditions de survenance des bifurcations connaissant une des périodes et l'intervalle de temps jusqu'à la suivante, qui la double : en divisant cet intervalle de temps par la constante de Feigenbaum on peut prédire approximativement la survenance de la bifurcation suivante, puis de la suivante, etc. jusqu'au chaos qui survient après quelques doublements, et ceci pour tout système dynamique répondant aux critères d'allure parabolique dans l'intervalle $0<x<1$.

1.8.5.2.11 Histogramme des évolutions chaotiques – Prédictibilité statistique

Nous avons vu que les évolutions de la fonction logistique pour $r=4$ sont apériodiques : lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini, les valeurs successives de x_n oscillent de façon désordonnée sans jamais repasser par un point déjà atteint. Nous savons aussi que les trajectoires dues à deux valeurs initiales distinctes n'ont ni intersection ni point de contact, conformément à leur caractère déterministe.

L'ensemble des trajectoires pour les diverses valeurs initiales a pourtant en commun l'allure des histogrammes de la distribution de leurs valeurs finales : deux valeurs initiales distinctes donnent des fréquences quasi-identiques d'apparition des x_n lorsque n est grand. Voici un de ces histogrammes de la fonction logistique avec $r=4$, représenté pour $n=10000$ itérations à partir d'un point initial $x_1=0.3$.



On remarque le nombre considérable d'occurrences de x_n pour les intervalles $0 < x_n \leq 0.001$ et $0.999 \leq x_n < 1$, respectivement environ 230 et environ 250, contre seulement une petite dizaine d'occurrences de chacun des 998 autres intervalles.

Cet histogramme peut servir à trouver des pourcentages moyens de temps (c'est-à-dire d'itérations) que le système passe pour des valeurs finales :

- Entre 0.1 et 0.2 : 9.03% (et nous allons voir que ce pourcentage est le même quelle que soit la valeur initiale) ;
- Entre 0.6 et 1 : 43.6%;
- Entre 0 et 0.5 : exactement 50%.

Ces pourcentages de temps sont des probabilités de trouver un système dynamique dans un état donné à long terme.

Conséquences philosophiques sur la prédictibilité des trajectoires

- La première conséquence de cette quasi-identité d'histogrammes est qu'*à long terme la probabilité d'occurrence d'une valeur n'est significative que pour les valeurs extrêmes, voisines de 0 et 1* : ces deux valeurs sont stables, les autres étant instables. Cette constatation contredit, pour la fonction logistique avec *r=4*, celle de la sensibilité aux conditions initiales : même si la valeur de départ est très différente, au bout d'un certain temps les deux résultats les plus probables sont les mêmes !
- La seconde conséquence est *l'ergodicité* de toute trajectoire chaotique de la fonction logistique. Cela veut dire qu'un point quelconque x_a donné entre 0 et 1 sera approché, pour un certain *n* (numéro d'itération), aussi près que l'on veut, c'est-à-dire que quel que soit ε petit et positif il existe un *n* tel que $|x_n - x_a| < \varepsilon$.

La fonction logistique « balaye » donc tout l'intervalle ouvert]0, 1[, dont les divers points n'ont cependant pas la même probabilité d'être atteints au hasard.

Avec *r=4*, l'intervalle]0, 1[contient une infinité de points périodiques ou situés sur une trajectoire menant à un point périodique instable ; mais *presque tous* les points initiaux mènent à une trajectoire apériodique et à un histogramme très semblable au précédent (« *presque tous »* a été défini au paragraphe *Nombre aléatoire, nombre normal* ; voir aussi, au paragraphe *Evolution apériodique*, le sous-titre *Sensibilité aux conditions initiales*).

Une trajectoire ergodique est apériodique ; elle « contourne » les points finaux périodiques (instables) tout en s'en approchant aussi près que l'on voudra. Et deux trajectoires qui sont proches pendant plusieurs itérations le resteront encore pendant un certain temps ; c'est une des raisons qui expliquent la similitude des histogrammes.

Tout système dynamique contenant une trajectoire ergodique est statistiquement stable. Pour de nombreux système dynamiques (notamment la fonction logistique) il ne peut exister qu'une distribution de valeurs finales (et un seul histogramme) constituant un attracteur.

Il y a là des *prédictibilités statistiques* de l'évolution et de la valeur finale d'une trajectoire de système chaotique.

- Conséquence déterministe importante de l'ergodicité : toutes les trajectoires apériodiques (donc, en probabilité 100% des trajectoires) d'un système chaotique ont la même probabilité d'atteindre un sous-intervalle donné de]0, 1[. C'est, là aussi, une prédictibilité statistique de la valeur finale d'une trajectoire de système chaotique.

- Pour un système dynamique comme celui de la fonction logistique *la valeur moyenne à long terme* n'a aucun sens ; seul l'histogramme de la distribution des valeurs décrit celles-ci à long terme de façon utilisable.

- Tout système dynamique chaotique dont l'évolution ressemble à celle de la fonction logistique est *statistiquement prédictible*, bien que ses trajectoires ne le soient pas !

  Météorologie
  Le temps qu'il fait est un système météorologique notoirement chaotique : les prédictions *à court terme* sont entachées d'« effet papillon » dû à la sensibilité aux conditions initiales. Mais sa prédictibilité *statistique* permet des prédictions plus fiables de données météorologiques comme la pluviosité moyenne et la température moyenne sur un siècle que sur une semaine : il ne faut pas confondre *météo à court terme* et *évolution du climat*, car elles sont régies par des lois d'évolution différentes : déterministe pour la météo, déterministe statistique pour le climat.

  > Selon [B8-2] page 11, il est démontré que la prévision météorologique *a un horizon de l'ordre de deux à trois semaines* : quoi que l'on fasse, quel que soit le nombre de stations météo, quelle que soit la fidélité du modèle informatique de l'atmosphère et la précision des calculs on ne pourra pas prédire le temps plus longtemps à l'avance.

- Tout système dynamique chaotique (et pas seulement ceux que régit la fonction logistique) apériodique a une infinité de points inaccessibles à une trajectoire apériodique, car si une telle trajectoire en atteignait un elle deviendrait périodique et ne serait plus apériodique.