1.8 Chaos

Introduction
Le mot chaos évoque la désorganisation, l'imprédictibilité. S'agissant de systèmes physiques ou abstraits qui évoluent, le caractère chaotique vient de ce que leurs équations descriptives d'évolution *déterministes* ont pourtant des solutions imprédictibles. Nous avons abordé ce phénomène au paragraphe *Le déterminisme ne garantit pas la prédictibilité*, et nous verrons dans celui-ci qu'une des raisons de l'imprédictibilité des systèmes chaotiques est leur *sensibilité aux conditions initiales*.

Nous verrons aussi que cette imprédictibilité n'est pas totale : les prédictions sont possibles dans le cadre de statistiques, les variables prédites étant stochastiques. Les évolutions des systèmes dynamiques sont régies par un déterminisme enrichi, le *déterminisme statistique* ; il y a là des analogies avec les évolutions en Mécanique quantique, régies également par le déterminisme statistique.

Il n'y a pas de « Théorie du chaos », il y a une « Théorie des systèmes dynamiques »
Voici une première définition du sujet de l'étude du chaos due à [B8-4] page 2 :

> *Etude qualitative du comportement apériodique des systèmes dynamiques déterministes non linéaires.* (Noter le « qualitative ».)

Selon le *Dictionnaire de l'Académie* [B60], « une théorie scientifique est un ensemble de lois formant un système cohérent et servant de base à une science, ou rendant compte de certains faits ».

Or, il n'y a pas d'équation du chaos, pas de méthode chaotique pour calculer un état physique ou une évolution, pas de méthodologie explicative de phénomènes physiques, économiques, etc. *Le chaos n'est pas une causalité*.

En toute rigueur, donc, au lieu de parler de Théorie du chaos nous devrions parler de *Théorie des systèmes dynamiques*.

Le chaos est un état de phénomène déterministe aux conséquences essentiellement négatives : il empêche la prédiction d'états futurs un peu lointains et il amplifie des imprécisions expérimentales. Nous en donnons des critères au paragraphe *Propriétés d'une évolution chaotique*.

1.8.1 Evolution itérative

La non-linéarité exige une solution numérique par itérations successives
Le caractère non linéaire de l'évolution d'une fonction chaotique interdit, en général, d'en donner une formule permettant un calcul direct en fonction du temps de la forme $F(t)$.

Voici le principe du calcul de l'évolution d'un tel système. On calcule *numériquement*, par itérations successives aux instants t_1, t_{1+h}, t_{1+2h}…, la valeur de ses variables $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ et leurs variations pendant un court intervalle de temps h grâce à leurs dérivées : voir exemples dans *Déterminisme des évolutions régies par des équations différentielles*. L'évolution des systèmes dynamiques est donc décrite par une suite d'étapes de calcul dont chacune a pour point de départ le résultat de la précédente. Mais rappelons d'abord quelques définitions dont nous aurons besoin.

Définition d'une suite de nombres

Une *suite* de nombres x_1, x_2, x_3… est définie par une loi de progression d'un terme au suivant ou de calcul des termes connaissant leur rang ;
exemple : la loi $x_n = 2n$, produit la suite 2, 4, 6… pour n = 1, 2, 3…

Exemple de progression

Considérons un pays à forte natalité : malgré les décès, les naissances sont si nombreuses que la population croît de 2% par an. Ainsi, un groupe représentatif de *100* personnes de ce pays en compte statistiquement *102* un an après, *102 x 1.02* l'année suivante, etc. Si x représente la population de l'année n, celle de l'année $n+1$ sera $1.02x$, celle de l'année $n+2$ sera 1.02^2x, etc.

La suite des populations sera donc telle que $x_{n+1}=1.02x_n$: connaissant la population x_n de l'année n on peut en déduire celle de l'année x_{n+1} en appliquant la loi de progression « multiplier par 1.02 ». Et en recommençant (on dit « en itérant ») p-n fois (où $p>n$) l'application de la loi de progression de la suite x_n on peut calculer x_p connaissant x_n.

Comparaison d'évolutions par calcul direct et par itération

Considérons la suite $x_{n+1}=1.02x_n$.

- Un *calcul direct* de x_n connaissant x_0 (l'élément initial de rang 0 la suite) est possible : $x_n=1.02^nx_0$. Exemple : *si* $x_0=2$ et $n=3$, $x_3=1.02^3 \times 2=2.122416$.
- Un *calcul itératif* à partir de $x_0=2$ serait :
  - Etape 1 : $x_1=1.02 \times 2=2.04$;
  - Etape 2 : $x_2=2.04 \times 1.02= 2.0808$;
  - Etape 3 : $x_3=2.0808 \times 1.02=2.122416$.

Un calcul direct est plus simple et rapide qu'un calcul itératif, sauf lorsque la loi de progression est si compliquée qu'il faut avoir (ou écrire) un programme informatique qu'on exécutera autant de fois qu'il faut faire d'itérations ; c'est le cas, par exemple, pour certaines lois d'évolution physiques définies par des *équations différentielles* : voir le paragraphe *Déterminisme des évolutions régies par des équations différentielles.*

Les deux méthodes de calcul, direct ou itératif, sont déterministes : connaissant une donnée initiale et une loi de progression, on en déduit (on prévoit) une évolution dont on prédit avec certitude le résultat au bout d'un nombre de périodes, entier ou non.

1.8.2 Théorie des systèmes dynamiques

Source : [B160] pages 74 à 79.

Système dynamique

Par définition, un système qui évolue selon une loi donnée à partir d'un état initial donné est appelé *système dynamique* ; parler de *son évolution,* c'est parler de *sa dynamique*.

Théorie des systèmes dynamiques

La Théorie des systèmes dynamiques est une théorie *qualitative* des systèmes d'équations différentielles. A partir de principes et sans écrire explicitement d'équation, elle étudie les propriétés générales de leurs solutions :

- Trajectoires, c'est-à-dire valeurs des variables en fonction du temps ;
- Points d'équilibre stables et instables ;
- Oscillations ;
- Evolutions apériodiques, etc.

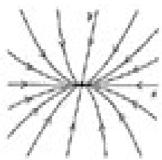
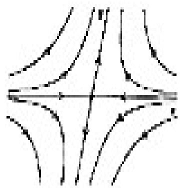
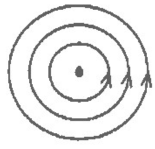
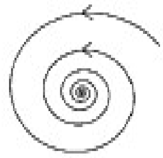
Cette étude associe les informations de voisinages de points (états du système) particuliers avec des propriétés géométriques et topologiques générales de la forme et de la structure de la *variété* (espace courbe des phases, localement euclidien) des solutions possibles. Les résultats de cette étude sont appliqués à l'aide de programmes informatiques de calcul de solutions approchées.

Théorie des systèmes dynamiques d'Henri Poincaré

La théorie des systèmes dynamiques imaginée en 1892 par Henri Poincaré dans le cadre du « Problème des trois corps » [B162], est citée ici car la dynamique du chaos en fait partie ; voir au chapitre *Chaos* le sous-titre *Sensibilité aux conditions initiales*. Cette théorie fournit des outils mathématiques (analytiques, topologiques, géométriques et numériques) pour analyser qualitativement et quantitativement des systèmes régis par des équations différentielles.

Exemple de résultats fournis par cette théorie

1. Dans l'espace des phases il y a 4 types de points d'équilibre vers lesquels un système dynamique peut évoluer : les nœuds, les cols, les centres et les foyers.

 Nœud	 Col	 Centre	 Foyer

Points d'équilibre de l'espace des phases - Sources : thèse de Loïc Petitgirard et [B161]

- Nœud : une infinité de courbes intégrales passent par le point ;
- Col : deux courbes intégrales passent par le point ;
- Centre : les courbes intégrales sont des courbes fermées entourant le point ;
- Foyer : les courbes intégrales s’enroulent en spirale autour du point.

2. En appelant *N* le nombre de nœuds, *F* le nombre de foyers et de centres et *S* le nombre de cols, on a :
   - Pour un système dynamique dont l'espace des phases est une sphère : $N + F = S + 2$;

- Pour un système dynamique dont l'espace des phases est un tore avec g trous : $N + F = S + 2 - 2g$.

  Ces relations sont les mêmes que celles d'Euler reliant les nombres de faces *F*, d'arêtes *A* et de sommets *S* d'un polyèdre, et ce n'est pas une coïncidence.

3. Un système dynamique qui a un espace des phases torique peut n'avoir aucun équilibre et évoluer indéfiniment.

   Mais cette situation ne peut survenir dans un espace sphérique, car en l'absence de col le nombre total de nœuds et de foyers doit être égal à 2. C'est pourquoi un épi se forme au sommet du crâne : on ne peut se peigner en orientant toujours les cheveux dans le même sens sans qu'il y ait un point où ils forment un tourbillon (appelé « foyer » par Poincaré) ; cette restriction n'existe pas pour les crânes chauves où l'absence de cheveux au sommet produit une valeur g=1 dans la formule Poincaré.

Applications de la Théorie des systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée en mécanique céleste (astronomie de position), en chimie, en biologie, en économie, en sociologie, en résistance des matériaux (tenseur des contraintes et tenseur des déformations), etc.

Ouvrages traitant de Théorie des systèmes dynamiques : voir [B242].

1.8.3 Conditions définissant le caractère chaotique d'un système dynamique

Source [B8] pages 85 à 87

Définition d'un système dynamique à évolution chaotique

On dit qu'un système dynamique a une évolution chaotique si et seulement si, considérant une suite itérative d'états *i* de sa variable x_i :

1. Cette suite est telle que la fonction d'évolution soit de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$
   où l'état $n+1$ ne dépend que de l'état précédent n : la fonction d'évolution (la suite des états) est donc déterministe ;
2. La suite des états est apériodique :
   (aucune partie de la suite d'états n'existe plus d'une fois) ;
3. La suite est bornée inférieurement et supérieurement :
   (les valeurs de la fonction d'évolution sont comprises entre un minimum et un maximum) ;
4. Le système dynamique est sensible aux conditions initiales :
   (une variation - même petite - des conditions initiales d'une loi d'évolution donnée produit, à plus ou moins long terme, des variations significatives et imprévisibles, de la fonction ; pour une mesure de cette sensibilité voir le paragraphe *Exposant de Liapounov*). Le système dynamique est donc non linéaire.

   Exemples :

   - Au paragraphe *La fonction logistique*, sous-titre *Sensibilité aux conditions initiales*.

- Au paragraphe *Déterminisme des évolutions régies par des équations différentielles,* sous-titres *Equations de Lorenz – Dynamique chaotique* et *Attracteur de Rössler*.

  Définition d'attracteur : voir *Bassin d'attraction de l'espace des phases*.

Définition rigoureuse de la sensibilité aux conditions initiales d'une fonction *f*

Une fonction d'itération *f(x)* est dite sensible aux conditions initiales si, étant donnés un nombre δ arbitrairement grand et un nombre ε arbitrairement petit, il existe pour presque toute valeur initiale x_0 une valeur initiale y_0 et un entier n tels que si $|x_0-y_0|<\varepsilon$ alors après n itérations $|x_n-y_n|>\delta$.

(Pour la définition mathématique de « presque toute » voir le paragraphe *Nombre aléatoire, nombre normal*.)

Complément : Voir plus bas au paragraphe *Sensibilité aux conditions initiales* le sous-titre *Précision sur la sensibilité aux conditions initiales*.

Indépendance du caractère chaotique et des lois physiques

Le caractère chaotique de l'évolution d'un système dynamique est une propriété purement mathématique (donc déterministe) de divers modèles d'évolution. En lui-même, ce caractère ne suppose aucune loi physique particulière, même si ses conséquences d'imprédictibilité régissent bien des phénomènes physiques comme la turbulence des écoulements de fluides ; il n'y a pas, par exemple, en matière de chaos, une hypothèse sous-jacente de vitesse négligeable par rapport à celle de la lumière. Les mathématiques du chaos sont aussi indépendantes des phénomènes physiques que les nombres eux-mêmes : ce sont des calculs purs.

Nous verrons que les mathématiques du chaos permettent certaines prévisions exactes et certaines prévisions statistiques ; mais elles limitent notre possibilité de prédire des résultats ou leur précision. Elles ont leur propre loi universelle, l'accélération de l'évolution des périodes vers le chaos, régie par la constante δ de Feigenbaum, et leur modèle de sensibilité aux conditions initiales régie par l'exposant de Liapounov.

1.8.4 Propriétés d'une évolution chaotique

A long terme ($t\rightarrow\infty$), l'évolution d'un système dynamique peut avoir une valeur unique ou un groupe de valeurs successives formant une période qui se répète indéfiniment : voir plus bas l'exemple de *La fonction logistique*.

L'évolution peut aussi être apériodique, ayant alors une infinité de valeurs uniques, phénomène chaotique que nous examinons dans la suite de ce paragraphe.

Non-linéarité

Sa sensibilité aux conditions initiales fait qu'une évolution chaotique est nécessairement non linéaire (la variation d'un résultat n'est pas proportionnelle à celle de la donnée initiale). Une évolution chaotique d'un système dynamique est non linéaire dans tous les systèmes dont le nombre de degrés de liberté est fini.

Limite de la précision des résultats quelle que soit celle des données initiales

Une évolution chaotique limite la précision des résultats : accroître la précision des mesures des données initiales ne permet pas d'accroître avec certitude celle des résultats d'évolution à long terme (d'où l'impossibilité de prédire à long terme la trajectoire d'astéroïdes, perturbée par celle des grosses planètes comme Jupiter).

Imprédictibilité à long terme
L'évolution d'un système chaotique est imprédictible à long terme : une différence minuscule dans l'état initial produit des différences considérables à long terme, phénomène appelé « *Effet papillon* » ; seule est possible la prédiction d'évolutions à court terme (après un nombre réduit d'itérations).

Unicité des résultats successifs d'une évolution apériodique
La suite infinie de valeurs d'évolution (position x, y, z en fonction de l'instant t_n, par exemple) est unique à long terme, aucune valeur n'apparaissant plus d'une fois.

Deux trajectoires d'évolution partant de points distincts restent totalement distinctes
Elles n'ont aucun point commun, car à partir d'un point d'une trajectoire l'évolution est unique. Leur évolution peut, cependant, devenir à l'infini aussi proche que l'on veut de points ou d'une courbe appelés *attracteurs*.

Alternance de points de bifurcation et de points d'apériodicité
(Pour la définition d'une bifurcation voir *Changements de phase d'un corps pur* dans *Limites d'application d'une loi d'évolution*).

Les points à l'infini de certaines trajectoires peuvent être uniques ou multiples. Des bifurcations sont possibles pour certaines valeurs de paramètres critiques, après lesquelles une trajectoire se sépare en deux, chaque branche pouvant ultérieurement bifurquer à son tour. Après un certain nombre de bifurcations il peut y avoir un nombre infini d'états finaux, pour lesquels l'évolution est apériodique.

Structure fractale du diagramme de bifurcation
Nous verrons au paragraphe *Diagramme des bifurcations - Universalité - Constante de Feigenbaum* que ce diagramme présente pour la fonction logistique une structure fractale qui se reproduit à diverses échelles : on parle *d'auto-similitude*. Cette structure fractale du comportement d'un système dynamique est très fréquente dans leurs modèles.

Le caractère chaotique est sans rapport avec la complexité de la loi d'évolution
Même des lois d'évolution simples peuvent, par une suite d'itérations, donner des résultats multiples, imprévisibles, sensibles aux conditions initiales donc chaotiques ; voir par exemple les sous-titres du paragraphe *La fonction logistique*.

<u>Propriétés d'écartement et de rapprochement</u>

Une fonction d'évolution chaotique :

- *Sépare deux états initiaux proches* : après un certain nombre d'itérations, la fonction d'évolution agrandit la distance entre ces états d'entrée et les états de sortie correspondants : c'est la sensibilité aux conditions initiales ;
- *Rapproche deux états successifs d'une évolution* : chaque itération prend pour valeur d'entrée de la transformation la valeur de sortie précédente, ce qui rapproche les points successifs (rapprochement indispensable pour respecter le caractère borné de l'évolution, c'est un critère de convergence de toute suite).