Axiomatique et théorèmes de Gödel

Mise à jour : 29/11/2009

Ce texte résume et complète sur des points de détail le texte anglais "Gödel's Proof" de E. Nagel et J. R. Newman, édité par Douglas R. Hofstadter (édition révisée de 2001 publiée par New York University Press).

Je ne saurais trop recommander sa lecture à tous les anglophones intéressés par les limites de l'approche axiomatique, car c'est un modèle de clarté et de concision.

Table des matières

1. Définitions

1.1 Propositions

Considérons des affirmations qui ne peuvent être que vraies ou fausses, donc sans exception ni nuance ; nous les appellerons *propositions* et les écrirons entre guillemets. Exemple : "Le chat est mort".

1.2 Axiomes et règles d'inférence

Considérons un ensemble de propositions admises comme vraies sans démonstration, appelées *axiomes* ou *postulats*, et un ensemble de règles logiques (appelées *règles d'inférence* ou *règles de déduction*) permettant de déduire une proposition nouvelle de l'ensemble des propositions vraies déjà connues.

1.3 Axiomatique et théorèmes

Nous appellerons *axiomatique* le système constitué par l'ensemble des axiomes et des règles d'inférence que nous nous sommes donné. En appliquant une ou plusieurs fois des règles d'inférence à des axiomes de notre axiomatique, nous pouvons déduire des propositions vraies que nous appellerons *théorèmes*. Et les théorèmes vrais car démontrés s'ajoutant aux axiomes admis, nous pouvons en leur appliquant de nouveau des règles d'inférence déduire de nouveaux théorèmes, etc.

Les théorèmes déduits d'une axiomatique n'apportent donc pas de vérité nouvelle : ils sont implicitement contenus dans l'axiomatique ; ils en sont des conséquences logiques et n'y ajoutent que des présentations nouvelles, des rapprochements nouveaux.

1.3.1 Exemple 1 : axiomatique des nombres entiers naturels de Peano

Dans une axiomatique il y a une liste de termes et expressions supposés connus et compris sans définition explicite. Nous conviendrons d'exprimer toutes les propositions (axiomes et théorèmes) de l'axiomatique exclusivement à l'aide des termes de cette liste et *d'opérations* qui les relient, en respectant des règles de formation constituant la *syntaxe* du langage de l'axiomatique.

- Dans l'exemple suivant comme dans toute la suite de ce texte, lorsque nous parlerons d'un *nombre*, il s'agira d'un nombre entier non négatif, concept supposé compris sans autre définition. Nous supposerons aussi que zéro est un nombre représenté par le caractère 0.

- Nous parlerons du *successeur d'un nombre* pour désigner le nombre qui suit immédiatement un nombre donné ; exemple : le successeur de 1, noté s1, est 2.

  La notion de successeur implique une *opération* faisant passer d'un nombre à son successeur ; nous la représenterons par un s minuscule situé immédiatement à gauche du mot représentant le nombre, comme dans s1. On peut alors relier s1 et 2 par l'opérateur *équivaut à* (ou *égale*), représenté par le symbole =, en écrivant la proposition 2=s1. On définit aussi l'opérateur *différent* *de*, noté ≠, opposé de l'opérateur =. Nous supposerons compris sans autre explication les concepts de successeur, d'équivalence et d'opérateur.

Nous définirons des *variables* représentant des nombres entiers naturels et représenterons chacune par une lettre comme x, y ou z.

Nous supposerons aussi que la syntaxe du langage comprend la possibilité de former une proposition en concaténant des mots et opérateurs sous la forme : « mot résultant »« opérateur »« mot opérande » comme dans 2=s1. Par convention, la progression de l'opérande vers le résultat en passant par l'opérateur se fait de droite à gauche dans une proposition.

- Les propriétés des nombres seront définies par les 5 axiomes suivants, constituant ce qu'on appelle « l'axiomatique de Peano » :

  1. Zéro est un nombre (représenté par le mot 0) ;
  2. Le successeur d'un nombre est un nombre ; la règle d'inférence exprimant que y est le successeur de x s'écrit : y=sx ;
  3. Zéro n'est le successeur d'aucun nombre ;
  4. Deux nombres distincts x≠y ont des successeurs distincts, respectivement sx et sy, tels que sx≠sy ; en notant ⇒ l'opérateur d'inférence *donc*, la règle d'inférence s'écrit : x≠y ⇒ sx≠sy ;
  5. Toute propriété vraie pour zéro et pour le successeur d'un nombre quelconque est vraie pour tous les nombres (ce qui signifie que nous admettons le raisonnement par récurrence).

  Exemples de théorèmes de cette axiomatique : 1=s0 ; 2=s1.

1.3.2 Exemple 2 : axiomatique de la mécanique quantique

En tant que méthode, l'axiomatique s'applique à la physique pour permettre une certaine formalisation et l'application (automatique, sans considération de signification) de mathématiques à ses problèmes. Après adoption d'axiomes mathématiques et de règles de correspondance décrivant le passage des phénomènes observables aux symboles des axiomes mathématiques, l'étude d'un problème se réduit à des déductions théoriques suivies d'une vérification expérimentale.

Voir le paragraphe "Application d'une axiomatique à la physique" à l'adresse http://www.danielmartin.eu/Philo/Determinisme.htm#PostulatsMQ

1.4 Propositions indémontrables

Considérons à présent la proposition "Cette proposition est indémontrable" ; elle est soit vraie, soit fausse.

- Si elle est vraie, alors elle est indémontrable.
- Si elle est fausse, alors on peut la démontrer, ce qui contredit ce qu'elle affirme. Donc elle est vraie, donc indémontrable.

Conclusions :

- Cette proposition qui affirme quelque chose sur elle-même est indémontrable.
- Il existe au moins une proposition indémontrable, celle-là.

1.5 Principes du tiers exclu, de non-contradiction et du syllogisme

La démonstration précédente invoque deux des trois principes fondamentaux de la logique : le principe du tiers exclu et le principe de non-contradiction.

<u>Principe du tiers exclu</u>
Il n'y a que deux cas de valeur logique. Une proposition p ne peut être que :

- vraie, et alors la proposition contraire ~p est fausse ;
- ou fausse, et alors la proposition contraire ~p est vraie.

Il n'y a pas de troisième cas.

C'est sur ce principe que reposent les démonstrations par l'absurde.

<u>Principe de non-contradiction</u>
Le contraire du vrai est faux. Une affirmation est soit vraie, soit fausse, mais pas en même temps vraie et fausse. Il y a une exigence de non-contradiction : aucune proposition ne peut être vraie si elle contredit une vérité établie sans la remplacer.

Un troisième principe est souvent utilisé dans les démonstrations d'une axiomatique : le principe du syllogisme.

<u>Principe du syllogisme</u>
En notant $\supset$ la relation signifiant *implique*, *entraîne* ou *donc*, le principe du syllogisme est la règle de déduction :

$$\text{si } A \supset B \text{ et } B \supset C, \text{ alors } A \supset C$$

ce qu'on peut écrire sous la forme symbolique : $(A \supset B \wedge B \supset C) \supset (A \supset C)$ en représentant la conjonction *et* par le symbole $\wedge$**.**

La relation $\supset$ est transitive, comme la relation =, la relation >, etc.

1.6 Langage de l'axiomatique de Gödel

Dans l'exemple "Cette proposition est indémontrable" nous avons raisonné sur la vérité de cette proposition sans avoir précisé au préalable les axiomes et règles d'inférence que nous nous donnions ; c'est là un manque évident de rigueur. Nous allons à présent approfondir un peu la manière de définir l'axiomatique de Gödel, d'en écrire les propositions et les déductions.

Un langage convenant à cette axiomatique (propositions, dont les axiomes et théorèmes, et règles d'inférence) comprend un *alphabet* et une *syntaxe*.

1.6.1 Alphabet

L'alphabet de l'axiomatique est une suite de caractères qui sont soit des *constantes*, soit des *variables*.

<u>Constantes</u>

Pour établir ses théorèmes, Gödel a utilisé les 12 constantes suivantes, en attribuant à chacune un numéro arbitraire, nous verrons plus bas pourquoi :

Symbole de constante	Numéro attribué	Signification habituelle
~	1	non
v	2	ou
⊃	3	implication : si… alors…
∃	4	il existe un
=	5	égale
0	6	zéro
s	7	successeur immédiat de
(	8	séparateur
)	9	séparateur
,	10	séparateur
+	11	plus
*	12	multiplié par

Les 12 constantes de Gödel

<u>Variables</u>

Les variables ont l'un des 3 types suivants, chacun comprenant 3 variables :

- Nombre, désigné par une des lettres minuscules x, y, z ;
- Proposition, désignée par une des lettres minuscules p, q, r ;
- Prédicat, désigné par une des lettres majuscules P, Q, R.

  Un *prédicat* est une proposition qui dépend d'une ou plusieurs variables. Exemples :

  - P, proposition dont l'énoncé dépend de la variable x ; exemple : "x+1" ;
  - Q, proposition dont l'énoncé dépend de x et y ; exemple : "x=sy".

Noter les majuscules pour les prédicats et les minuscules pour les variables. Selon les valeurs de ses variables, un prédicat prend la valeur 1 s'il est vrai, ou 0 s'il est faux.

Gödel a désigné chacune des 9 variables ci-dessus par 3 puissances successives des 3 premiers nombres premiers supérieurs à 12, c'est-à-dire 13, 17 et 19, comme ceci :

Variable	Numéro attribué	Exemple de substitution possible
x	13	0
y	17	s1
z	19	y
p	13^2	0=0
q	17^2	(∃x) (x=sy)
r	19^2	p⊃q
P	13^3	x=sy
Q	17^3	~(x=ss0*y)
R	19^3	(∃x) (x=y+sz)

Les 9 variables de Gödel

1.6.2 Syntaxe

La syntaxe des propositions est simple. Exemples :

- La proposition 2 des axiomes de Peano ci-dessus "Le successeur d'un nombre est un nombre" s'écrit, avec les conventions de Gödel, "Il existe un x tel que x est le successeur de y", c'est-à-dire "(∃x) (x=sy)", où la conjonction *tel que* séparant les deux parties de la proposition résulte implicitement de la séparation de cette proposition en deux parties délimitées par des couples de parenthèses.
- La liste des constantes permettant d'écrire le seul nombre zéro, un nombre quelconque s'écrit sous forme de successeur du successeur du successeur, etc. de zéro, c'est-à-dire par convention "sss…sss0". Ne pas confondre cette expression, qui est une suite de caractères, avec une variable numérique.
- La proposition "x est un diviseur de y", qu'on peut traduire par "Il existe un nombre z tel que y soit le produit de x par z" s'écrit : "(∃z) (y=z*x)".

Dans le texte d'une proposition syntaxiquement correcte on peut toujours remplacer une variable de proposition ou de prédicat par sa valeur. Exemples :

- Si la proposition r a pour valeur "x=ss0" (ce qui veut dire "x est le successeur du successeur de 0") on peut écrire le prédicat "Q=~(x=ss0*y)" sous la forme "Q=~(r*y)".
- Inversement, on peut dans "Q=~(r*y)" substituer "x=ss0" à r et écrire "Q=~(x=ss0*y)".

Cette possibilité de substitution peut servir, par exemple, à compléter la liste des constantes ci-dessus : la constante ET, qui n'en fait pas partie mais est indispensable dans une proposition comme "p ET q", peut être exprimée en utilisant la constante OU (écrite v) en écrivant "p ET q" sous la forme "~(~p v ~q)".

1.7 Numérisation de l'axiomatique de Gödel

Pour raisonner sur l'axiomatique ci-dessus, faisant ainsi de la *méta-axiomatique*, Gödel a eu l'idée d'en transformer toutes les propositions et tous les raisonnements (suites de propositions) en nombres entiers naturels régis par l'axiomatique sur laquelle il allait raisonner. Voici comment.

1.7.1 Des propositions aux nombres entiers

<u>1ère étape de la transformation d'une proposition en nombre entier</u>

Avec la représentation numérique de Gödel décrite ci-dessus, la proposition de 10 caractères "(∃x) (x=sy)" devient :

$$\begin{array}{cccccccccc} (& \exists & x &) & (& x & = & s & y &) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 4 & 13 & 9 & 8 & 13 & 5 & 7 & 17 & 9 \end{array}$$

<u>2ème étape de la transformation d'une proposition en nombre entier</u>

A partir de la suite de 10 nombres ci-dessus, on forme un nombre unique produit des 10 premiers nombres premiers, chacun élevé à la puissance égale au nombre de même rang de la suite :

$$2^{8}\times 3^{4}\times 5^{13}\times 7^{9}\times 11^{8}\times 13^{13}\times 17^{5}\times 19^{7}\times 23^{17}\times 29^{9}$$

Ce nombre (dont nous n'aurons jamais à calculer la valeur décimale !) représente la proposition "(∃x) (x=sy)".

<u>3ème étape : transformation d'un raisonnement complet en nombre entier</u>

Un raisonnement exprimé dans le cadre de l'axiomatique est une suite de propositions (parfois précédées ou suivies de constantes, qui constituent des propositions particulièrement simples). Chacune de ces propositions ayant été transformée en un nombre, on va transformer le raisonnement entier (la suite de ses propositions, dans l'ordre) en un nombre unique, de la manière suivante.

Le nombre représentant chacune des propositions devient la puissance du nombre premier de même rang que la proposition. Par exemple, si les deux premières propositions du raisonnement sont représentées respectivement par les nombres i et j, le nombre représentant le raisonnement complet commencera par le produit $2^i x 3^j$; et si le raisonnement comprend 3 étapes et que sa $3^{ème}$ proposition est représentée par k, le raisonnement complet sera représenté par $2^i x 3^j x 5^k$.

Ainsi, tout raisonnement formulé selon les règles de l'axiomatique est représenté par un nombre entier auquel on peut appliquer les règles de l'axiomatique de Gödel. Nous appellerons les nombres produits de facteurs premiers résultant des transformations ci-dessus *nombres de Gödel*.

1.7.2 Des nombres entiers aux propositions

L'ensemble des propositions constituant un raisonnement est devenu un nombre unique bien défini, nous avons vu comment. Mais la transformation inverse, reconstituant une suite de propositions à partir d'un nombre de Gödel est également possible ; et grâce à la propriété d'unicité de la décomposition d'un nombre en puissances de facteurs premiers, cette reconstitution donne, elle aussi, un résultat unique en procédant comme suit.

La $1^{ère}$ proposition du raisonnement (représenté globalement par le nombre m) est le facteur premier de m qui est une puissance de 2, soit 2^a. Cette première proposition est donc représentée par le nombre a. Le premier caractère de cette proposition est l'exposant de son facteur premier puissance de 2, soit 2^c ; il est donc représenté par le nombre c. Le deuxième caractère est l'exposant de son facteur premier puissance de 3, etc. On peut ainsi décomposer le raisonnement en propositions et chacune de celles-ci en nombres-caractères, et ceci de manière unique et non ambigüe.

Les méthodes de passage des raisonnements et propositions axiomatiques aux nombres de Gödel, et des nombres de Gödel aux raisonnements et propositions axiomatiques constituent donc une application biunivoque de l'ensemble des propositions axiomatiques dans l'ensemble des nombres de Gödel.

Mais attention : tout nombre n'est pas un nombre de Gödel, il n'est pas nécessairement transformable en suite de propositions.

2. Problèmes de cohérence et de complétude

Toute axiomatique étant basée sur des axiomes et règles d'inférence admis à priori, deux problèmes peuvent apparaître : le risque d'incohérence et la limite de complétude. Voici de quoi il s'agit.

2.1 Cohérence d'une axiomatique

Puisque les axiomes et les règles d'inférence d'une axiomatique sont admis sans démonstration ni vérification de validité sémantique, deux théorèmes établis dans son cadre pourraient se contredire, l'un affirmant qu'une proposition est vraie et l'autre affirmant qu'elle est fausse, ce qui est inacceptable. C'est là un problème de *cohérence*.

Ce risque est d'autant plus grand que la formation des propositions se fait en appliquant les règles de déduction avec rigueur, mais sans juger de la valeur sémantique des propositions produites.

> Un ordinateur le fait très bien, du reste, et parvient à démontrer automatiquement des théorèmes parfois intéressants, même s'ils n'apportent que des formulations nouvelles de vérités admises à priori en définissant l'axiomatique, sans invention ni intuition.

C'est parce qu'elles ne se soucient que de la rigueur syntaxique des déductions et des propositions formées que les démonstrations d'une axiomatique sont dites *formelles*. C'est pourquoi elles ne garantissent aucune valeur sémantique aux théorèmes démontrés, aucune signification particulière dans un cadre externe à cette axiomatique, même si celle-ci a été construite en tant que modèle d'un phénomène physique.

2.2 Complétude d'une axiomatique

Une axiomatique est dite *complète* si on peut démontrer que toute proposition *qu'on y déduit* (théorème), ou *qu'on y énonce à priori* en la formant à partir de son alphabet conformément à ses règles de syntaxe, est soit vraie soit fausse. La démonstration éventuelle ne doit utiliser que des axiomes, théorèmes et règles de déduction de l'axiomatique ; elle doit en outre ne comporter qu'un nombre fini d'étapes.

Une proposition syntaxiquement correcte pour laquelle on aurait prouvé l'impossibilité de trouver une démonstration de sa vérité ou de sa fausseté (en un nombre fini d'étapes) serait dite *indécidable*. La présence d'une seule proposition indécidable dans une axiomatique rendrait celle-ci incomplète.

2.3 Axiomatique et méta-axiomatique

Une proposition syntaxiquement correcte dans le cadre d'une axiomatique (appelée désormais *proposition axiomatique*) n'a pas de signification particulière ; les règles syntaxiques de formation et de substitution, et les règles de déduction peuvent lui être appliquées sans se soucier de sémantique.

Exemple : "x=ss0"

Par définition, *une proposition méta-axiomatique est une proposition à propos d'une proposition axiomatique*.

Exemple : « "x=ss0" est une proposition axiomatique » signifie que "x=ss0" est une proposition respectant les règles syntaxiques de l'axiomatique.

Comme une proposition axiomatique, une proposition méta-axiomatique est soit toujours vraie, soit toujours fausse. *Mais en étant vraie ou fausse elle a une signification*, elle peut constituer un jugement concernant une propriété structurelle d'une proposition axiomatique.

L'approche méta-axiomatique permet de faire des raisonnements sur des propriétés de propositions axiomatiques, ou même d'axiomatiques entières, en leur attribuant un sens et en s'affranchissant d'une liste limitative d'axiomes de départ rigoureux. Sur le plan rigueur déductive, elle est justifiée par le besoin de séparer clairement les cadres méta-axiomatiques où les affirmations ont un sens, des cadres axiomatiques où on ne leur en attribue pas.

2.4 Transformation axiomatique de la méta-axiomatique

Les éventuels risques d'incohérence et d'incomplétude de l'axiomatique se traduisent par des propriétés méta-axiomatiques. Pour étudier ces propriétés, Gödel a commencé par démontrer que *toutes les propositions méta-axiomatiques qui l'intéressaient étaient en correspondance biunivoque avec des propositions de l'axiomatique elle-même*. Il a donc défini une application biunivoque de l'ensemble des propositions méta-axiomatiques sur l'ensemble des propositions de son axiomatique. Grâce à cette application, l'étude des propriétés structurelles des propositions de l'axiomatique que sont la cohérence et la complétude, énoncées sous forme de propositions méta-axiomatiques, se trouvait ramenée à une étude purement axiomatique. Et comme tout raisonnement ou toute proposition axiomatique est en correspondance biunivoque avec des nombres de Gödel, il suffisait de raisonner sur les propriétés de ces derniers.

Exemple : soit à traduire en proposition axiomatique le prédicat méta-axiomatique :

"x est divisible par 2, mais pas par une puissance de 2 plus grande que 1"
(c'est-à-dire : "x est divisible une seule fois par 2").

La traduction comprendra deux propositions, la première signifiant "x est divisible par 2" et la deuxième signifiant "x n'est pas divisible par (2 fois 2)", ces propositions étant reliées par ET.

- "x est divisible par 2" s'écrit "(∃z) (x=z*ss0)"
- "x n'est pas divisible par 2 fois 2" s'écrit : "~(∃z) (x=z*(ss0*ss0))"
- Nous avons vu que "p ET q" s'écrit "~(~p v ~q)".

Donc "x est divisible une seule fois par 2" s'écrit :

"~(~((∃z) (x=z*ss0)) v ~(~(∃z) (x=z*(ss0*ss0))))"

que l'on peut simplifier en supprimant des ~ et des parenthèses inutiles.

Pour qu'une proposition méta-axiomatique soit vraie il suffit donc que sa traduction axiomatique soit un théorème. Et comme il y a une correspondance biunivoque entre toute proposition et son nombre de Gödel, il suffira de raisonner sur les nombres correspondants. Cette importante propriété permet même de démontrer qu'une proposition méta-axiomatique du type "*ce raisonnement démontre la proposition axiomatique p*" est démontrable à l'aide d'une transformation en proposition axiomatique.

2.5 Théorème d'incomplétude

Gödel a démontré le théorème d'incomplétude suivant :

> *Dans tout système axiomatique comprenant l'addition et la multiplication des nombres entiers non négatifs, ainsi que les règles d'inférence et de syntaxe de l'axiomatique de départ, on peut formuler des propositions indécidables.*

Voici schématiquement les étapes de sa démonstration.

<u>Construction d'une proposition axiomatique</u>

Gödel a d'abord montré comment on pouvait construire une proposition axiomatique *G* représentant la proposition méta-axiomatique :

> *"La proposition G n'est pas démontrable dans le cadre de l'axiomatique".*

<u>Démonstration que *G* est indécidable</u>

La proposition *G* affirme quelque chose *à propos d'elle-même*. Pour la démontrer, Gödel a montré que le nombre de Gödel *g* associé à *G* est associé à une proposition axiomatique indémontrable.

Pour ce faire, Gödel a montré que *G* est démontrable si et seulement si sa proposition contraire, ~*G*, est démontrable, *ce qui n'est possible que dans le cadre d'une axiomatique non cohérente*.

Donc si l'axiomatique est cohérente, on ne peut démontrer ni *G* ni ~*G*, et *G est donc une proposition indécidable*.

<u>Démonstration que *G* est vraie</u>

Gödel a montré que, bien qu'indécidable, *G* est vraie.

Pour ce faire, il a montré que *G* est vraie si et seulement si il n'existe pas de nombre ayant une certaine propriété arithmétique qu'il a définie, affirmation qu'on peut démontrer.

Conclusions

- Puisque *G* est vraie tout en étant indécidable, l'axiomatique est nécessairement incomplète : elle contient au moins un théorème indémontrable.
- Gödel a ensuite cherché si une axiomatique plus riche, déduite de l'axiomatique actuelle par ajout d'axiomes permettant la démonstration de la proposition indécidable précédente serait, elle, complète. Il a prouvé que dans cette nouvelle axiomatique il y aurait *une autre* proposition, G', qui serait indécidable.

  En somme, quelle que soit la richesse d'une axiomatique comprenant au moins l'addition et la multiplication d'entiers, ainsi que les règles de déduction et de syntaxe très peu contraignantes de l'axiomatique de départ, on y trouvera toujours au moins une proposition indécidable ; *l'axiomatique sera toujours incomplète*.

2.5.1 Relation entre complétude et arrêt d'un programme

Le mathématicien anglais Alan Turing a démontré en 1936 ceci :

> *Il n'existe pas d'algorithme général permettant, au vu du texte d'un programme quelconque, de savoir s'il s'arrête ou s'il calcule indéfiniment sans jamais s'arrêter.*

Son théorème prouve que, dans le cas général, pour savoir si un programme s'arrête (et donc fournit son résultat) il faut l'exécuter. Et si cette exécution dure plus que le temps qu'on peut se permettre d'attendre, on ne peut savoir s'il s'arrête, on ne peut connaître son résultat !

Or un programme est une suite d'instructions écrites dans un langage informatique dont l'ensemble des instructions et règles de calcul constitue une axiomatique.

> (Réciproquement d'ailleurs, toute axiomatique peut être traduite en un programme, avec lequel un ordinateur pourra déduire automatiquement tous les théorèmes possibles, en combinant un nombre croissant de déductions.)

Un programme exécutable est donc une suite de propositions syntaxiquement correctes de cette axiomatique ; et son exécution constitue une démonstration de son résultat. Si ce résultat est obtenu en un nombre fini d'étapes (d'instructions exécutées), donc en un temps fini, le programme s'arrête.

Par définition, dans une axiomatique complète toute proposition est décidable en un nombre fini d'étapes, après lesquelles on peut savoir si elle est vraie ou fausse. Puisque le théorème de Turing montre qu'on ne peut savoir avec un algorithme général, au vu d'une proposition ou du raisonnement-programme qui y conduit, si ce programme s'arrête, il existe donc des propositions pour lesquelles il n'existe pas d'algorithme qui s'arrête, et qui sont donc indécidables.

Le théorème de Turing entraîne donc l'incomplétude de Gödel.

2.6 Théorème d'indécidabilité de la cohérence

Gödel a démontré que la proposition méta-axiomatique suivante est indécidable :

"L'axiomatique précédente est cohérente"

Voici schématiquement les étapes de sa démonstration.

<u>Construction d'une proposition axiomatique</u>

Gödel a d'abord montré comment on peut construire une proposition axiomatique A associée à la proposition méta-axiomatique "L'axiomatique précédente est cohérente".

<u>Indécidabilité de la proposition A ⊃ G</u>

Gödel a ensuite montré que la proposition "A ⊃ G" est démontrable dans l'axiomatique, c'est-à-dire que la proposition méta-axiomatique "L'axiomatique précédente est cohérente" entraîne la proposition méta-axiomatique "Il y a au moins une proposition axiomatique indécidable".

On voit facilement que si l'axiomatique est cohérente, la proposition A n'y est pas démontrable. (Si A était démontrable, puisque "A ⊃ G" est démontrée, G serait démontrable, ce qui est faux puisque c'est une proposition indécidable.)

<u>Conclusions</u>

- Il est impossible de démontrer la proposition "L'axiomatique précédente est cohérente".
- Une axiomatique comprenant au moins l'addition et la multiplication d'entiers, ainsi que les règles de déduction et de syntaxe très peu contraignantes de l'axiomatique de départ, ne permet pas d'y démontrer sa propre cohérence.
- Il est important de remarquer que la cohérence d'une axiomatique n'est pas indécidable dans *toute* méta-axiomatique, elle l'est seulement dans toute méta-axiomatique associée à l'axiomatique de départ. Des théorèmes ont établi cette cohérence en recourant à une forme particulière de récurrence, la *récurrence transfinie*, impliquant des ensembles infinis contrairement à l'axiomatique finie de Gödel. Nous n'aborderons pas ce sujet ici.

2.7 Conclusions sur les limites de l'axiomatique

Toute axiomatique utilisable pour modéliser un problème scientifique, économique ou même de logique pure comprendrait au moins les définitions d'axiomes et de règles de déduction de celle sur laquelle Gödel a travaillé. Et ses théorèmes montrent qu'une telle axiomatique a des limites incontournables.

Le théorème d'incomplétude montre que, quels que soient les postulats initiaux, il y aura toujours une infinité d'affirmations qui seront vraies mais indémontrables, et une infinité d'autres qui seront fausses mais également indémontrables. *L'espoir entretenu au début du XXe siècle par de grands mathématiciens comme David Hilbert et Bertrand Russel qu'on puisse un jour trouver des axiomatiques permettant de déduire tous les théorèmes, pour toutes les sciences exactes, par démonstration* *formelle à partir d'un nombre fini d'axiomes et en un nombre fini d'étapes de raisonnement est vain*.

> Mais le théorème d'incomplétude ne prouve pas l'impossibilité de découvrir des propositions dont la véracité ou la fausseté est certaine bien qu'indémontrable. Il laisse donc de la place pour l'intuition et la chance. Il prouve que l'esprit humain a des possibilités de découverte qu'on ne peut réduire à des raisonnements logiques déductifs. L'approche méta-axiomatique de Gödel pour établir ses théorèmes recourt à l'invention, l'astuce et l'élégance, et on peut y tester énormément de propositions dont la vérité est inaccessible *dans le cadre d'une axiomatique*.

Le théorème d'indécidabilité de la cohérence, basé sur le précédent, met fin aux espoirs de prouver qu'un ensemble bien choisi de postulats met à l'abri de théorèmes affirmant à la fois une chose et son contraire. Le risque d'incohérence existera quoi qu'on fasse. Chaque fois qu'un théorème a été établi formellement dans le cadre d'une axiomatique modélisant une branche scientifique il faut donc s'efforcer d'en vérifier la véracité sur des exemples et des conséquences, et d'en tester la résistance aux contre-exemples ; et comme cette démarche fait appel à l'imagination pour trouver des tests significatifs et à l'esprit critique pour apprécier la rigueur des conclusions, il est bon que plusieurs scientifiques apportent chacun des idées.

Daniel MARTIN

Retour page d'accueil