

# Travail ou Capital ? - La fonction de production

Mise à jour : 05/03/2009

Ce complément du "[Cours d'économie pour citoyens qui votent](#)" approfondit les notions de *production*, *productivité*, *coût* et *profit* en faisant intervenir les facteurs *travail* et *capital* et en montrant leur incidence sur l'emploi.

Ce texte un peu technique apporte au lecteur de nombreuses définitions utiles pour comprendre certains articles et rapports officiels, ainsi que la compréhension des mécanismes économiques qu'ils évoquent.

## Table des matières

<b>1. La fonction de production</b> .....	<b>2</b>
1.1 Définition de la fonction de production et de ses facteurs .....	2
1.2 Signification de la fonction de production .....	2
1.3 Microéconomie et macroéconomie .....	4
1.4 Fonctions de production en macroéconomie .....	4
1.4.1 Croissance potentielle et croissance effective .....	5
1.4.2 De quoi dépendent les facteurs travail et capital dans un pays donné ? .....	5
1.4.3 Croissance et chômage : rappels du tome 1 du "Cours d'économie pour citoyens qui votent" .....	6
1.5 Productivité moyenne et productivité marginale .....	7
1.6 Elasticité .....	8
1.7 Rendement de substitution .....	9
1.8 Influences réciproques des facteurs travail et capital .....	9
1.9 Productivité <i>globale</i> des facteurs de production .....	10
1.10 Rendements d'échelle .....	11
1.10.1 Fonctions de production homogènes .....	12
1.10.2 Exemple : fonction de Cobb-Douglas .....	12
1.11 Conclusions sur la fonction de production .....	12
<b>2. La fonction de coût</b> .....	<b>13</b>
2.1 Fonctionnement de l'entreprise pendant une période courte .....	13
2.1.1 Coûts unitaires marginal et moyen .....	14
2.1.1.1 Coût unitaire marginal .....	14
2.1.1.2 Coût unitaire moyen .....	15
2.1.2 Loi des rendements décroissants .....	15
2.2 Fonctionnement de l'entreprise pendant une période longue .....	15
<b>3. Profit maximum - Offre optimale</b> .....	<b>16</b>
3.1 Conséquences d'une baisse des prix de marché .....	18
<b>4. Références</b> .....	<b>19</b>

# 1. La fonction de production

## 1.1 Définition de la fonction de production et de ses facteurs

Pour produire un bien ou un service ayant une valeur  $P$  (en euros), il faut d'abord une quantité de travail dont le coût est  $L$  (en euros). Mais dans beaucoup d'activités on s'aperçoit qu'en investissant un capital  $C_i$  (en euros) (en matériel, logiciel, bâtiments, etc.) on peut automatiser le travail et obtenir la même production  $P$  avec un travail moins conséquent  $L' < L$ .

En réfléchissant au processus de production on s'aperçoit qu'il faut aussi disposer, en plus du *capital investi*  $C_i$ , d'un capital permettant de régler les diverses dépenses nécessaires avant que la vente de la production  $P$  ait rapporté de l'argent ; ce second type de capital est appelé *capital circulant*,  $C_c$ . Nous appellerons donc dorénavant  $C$  le *capital total*  $C_i + C_c$  :

$$C = C_i + C_c$$

En réfléchissant davantage, on constate qu'il faut aussi un savoir-faire et une certaine organisation (par exemple pour traiter administrativement les commandes reçues, pour apporter des matières premières nécessaires et emporter les produits finis, etc.) ; on trouvera aussi, sans doute, qu'il faut en plus respecter certaines contraintes de production. On modélisera donc symboliquement la production  $P$  par une fonction de 3 variables : le travail  $L$ , le capital  $C$  et « le reste »  $R$ , et on écrira :

$$P = f(L, C, R)$$

tout en reconnaissant qu'en général  $R$  n'est pas un nombre, mais seulement un symbole destiné à nous rappeler qu'il ne suffit pas de disposer de travail et de capital pour produire un bien ou un service.  $R$  représente les autres variables ou contraintes qui interviennent dans la production.

En économie, on appelle :

- *fonction de production* la fonction  $f$  ;
  - *facteurs de production* [6] les variables  $L, C, R$  intervenant dans la fonction  $f$ .
- Il est fréquent qu'on ne sache pas donner une formulation mathématique précise à la fonction  $f$ , par exemple parce que l'existence du facteur  $R$  ne s'y prête pas. Mais on s'efforce toujours de connaître la manière dont la fonction  $f$  varie lorsqu'un seul des facteurs de production varie, les autres restant fixes, ou lorsque deux de ces facteurs varient simultanément. On parle alors de *contribution* d'un certain facteur (ou d'un couple de facteurs) à la variation de la fonction, et on exprime toutes les variations relatives en pour-cent.

## 1.2 Signification de la fonction de production

La fonction de production est une relation qui modélise une entreprise ou une de ses productions. Dans la mesure où le modèle est juste, elle implique l'existence en général de plusieurs combinaisons possibles de facteurs qui conduisent à une même production donnée  $P$  :  $f(L_1, C_1, R_1) = f(L_2, C_2, R_2) = f(L_3, C_3, R_3)$ , etc.

L'existence, pour une production  $P$  donnée, de plusieurs choix de triplets  $(L, C, R)$  implique des possibilités comme :

- De *substituer du capital à du travail ou inversement* : vaut-il mieux produire  $P$  avec plus de main d'œuvre et moins de machines, ou l'inverse ?

On appelle **intensité capitalistique** le rapport  $K = C/L$ , facteur que l'on l'exprime par exemple euros par employé, ou en euros de capital par euro de travail. Ce facteur intervient dans la part de l'évolution de la productivité résultant d'un accroissement de la quantité ou de la qualité du matériel à disposition des travailleurs. Avec cette notation, la fonction de production  $f$  a pour variables  $L, K$  et  $R$ .

- De *choisir entre plusieurs contextes de production*  $R_1, R_2, \dots$ , chacun conduisant à un ou plusieurs choix  $(L_x, C_y)$  : si on produit en France la quantité  $P$  (contexte  $R_1$ ) il faut choisir le couple de valeurs  $(L_1, C_1)$ , alors que si on produit cette quantité en Chine (contexte  $R_2$ ), il faut choisir  $(L_2, C_2)$ .

On peut alors se poser la question du choix de la combinaison *optimale*. Exemple : celle qui coûte le moins cher dans un contexte  $R$  donné, en définissant le facteur capital  $K$  comme une fonction linéaire des facteurs  $L$  et  $C$  telle que  $K = L + mC$ , où  $m$  est une constante donnée exprimant le coût d'emprunt d'une unité de capital pendant le temps nécessaire pour produire  $P$  avec le travail  $L$ .

Dans une entreprise, on peut donc considérer la fonction de production comme une description des choix techniques possibles, et un moyen de faire le choix optimal en fonction de contraintes que l'on se donne. Il y a trois cas possibles de substitution entre deux facteurs :

- *Les facteurs sont parfaitement substituables* : on peut, par exemple, remplacer toute la main d'œuvre par du capital. C'est ce qui se passe lorsqu'on délocalise complètement une production : on a remplacé le travail  $L$  par le capital circulant  $C_c$  nécessaire pour financer la production à l'étranger.
- *Les facteurs sont partiellement substituables* : c'est le cas le plus fréquent ; il correspond par exemple à l'automatisation de certaines tâches, mais pas toutes.
- *Les facteurs ne sont pas substituables* : c'est le cas, par exemple, pour des matières premières où, quoi qu'on fasse, il faudra la même quantité de chaque matière première pour fabriquer une quantité donnée  $P$ . Un fabricant de desserts à base de riz aura toujours besoin de la même quantité de riz pour une production de desserts donnée ; il ne peut remplacer le riz par du sucre ou de la main d'œuvre.

Après avoir défini [ci-dessous](#) les notions d'agent, de microéconomie et de macroéconomie, nous verrons qu'[on peut utiliser la notion de fonction de production du PIB dans un pays](#), pour choisir par exemple entre une croissance riche en emplois peu qualifiés et utilisant peu de capital, ou une croissance avec peu de main d'œuvre mais beaucoup de capital. Nous reviendrons ensuite à l'étude des fonctions de production.

## 1.3 Microéconomie et macroéconomie

### Définitions

- On appelle **agent économique** une ou plusieurs personne(s), entreprise(s), banque(s), association(s) ou Etats qui manipulent de l'argent. Cette manipulation peut se produire lors d'achats, de ventes, de prêts ou de création de monnaie. Chaque agent économique a sa rationalité propre lorsqu'il effectue une transaction impliquant de l'argent :
  - Les consommateurs cherchent à maximiser leur satisfaction, dans la limite de leur budget ;
  - Les entreprises et les banques cherchent à maximiser leurs profits, les banques finançant l'économie ;
  - L'Etat veille à assurer le bien-être collectif et à redistribuer de l'argent.
- On appelle **microéconomie** la branche de l'économie qui étudie les comportements individuels des agents économiques. On suppose toujours que chaque agent agit au mieux de ses intérêts, compte tenu des contraintes qu'il doit respecter (lois et règlements, contrats signés, etc.)
- On appelle **macroéconomie** la branche de l'économie qui étudie les phénomènes au niveau des pays ou groupes de pays. L'étude porte :
  - sur la production (PIB, chômage...) ;
  - la répartition des richesses et leur consommation ou leur investissement ;
  - les questions financières et monétaires (inflation, taux d'intérêt...), etc.

## 1.4 Fonctions de production en macroéconomie

La définition précédente d'une fonction de production s'applique à une entreprise (ou département d'entreprise) qui fabrique un seul produit, ou une gamme de produits qu'on peut étudier dans leur ensemble avec une même fonction de production. C'est une définition de microéconomie.

On peut aussi définir une fonction de production au niveau macroéconomique, en considérant par exemple dans un pays le travail de toute la population active, la valeur totale de ce qu'elle produit, le capital nécessaire à cette production nationale, le coût total des importations et le niveau technique des travailleurs (intervenant dans le facteur R).

### Exemple

Soient P le PIB national (c'est une production), L la valeur totale des heures de travail qui ont produit P, C le capital utilisé pour obtenir cette production et R les « autres facteurs » intervenant dans la fonction de production  $P = f(L, C, R)$ .

On expliquera, par exemple, que la croissance du PIB national, 2.3 % une certaine année, est due à une croissance de L de 0.3 %, une croissance de C de 0.7 % et une croissance induite par la variation de R de 1.3 % ( $0.3 + 0.7 + 1.3 = 2.3$ ).

Ces ordres de grandeur sont réalistes : en général, les facteurs organisationnels autres que le travail et le capital intervenant dans R ont une influence plus importante

sur la production (ici 1.3 %) que l'influence totale du travail et du capital (1 %). Cela se comprend intuitivement dans l'exemple suivant : on a beau disposer de la main d'œuvre et du capital nécessaires, si la logistique mal organisée provoque du chômage technique en attendant des livraisons, le travail et le capital ne produisent rien pendant les périodes d'arrêt. Voir aussi l'exemple cité dans [\[1\]](#).

En fait, dans pratiquement tous les pays on observe chaque année une croissance de [la productivité](#) de l'ordre de 1 à 3 % (environ 1.6 à 1.8 % en France) : les travailleurs et les entreprises deviennent chaque année plus efficaces, parce qu'ils apprennent à travailler plus vite, achètent des machines plus performantes, gaspillent moins de ressources, etc.

#### 1.4.1 Croissance potentielle et croissance effective

Lorsque la demande pour un bien ou un service est forte, les entreprises essaient d'en produire davantage. Elles demandent alors plus d'heures de travail à leurs salariés, ce qui coûte plus cher à cause des heures supplémentaires ; ou elles embauchent des salariés, ce qui finit (à l'échelle d'un pays) par faire croître les salaires qu'il faut payer pour recruter de nouveaux salariés ou garder ceux qu'on a. Elles achètent aussi davantage de fournitures pour incorporer à ce qu'elles fabriquent ou utiliser dans les services qu'elles vendent, ce qui finit par faire croître le prix de ces fournitures.

La conclusion est claire : *une production qui augmente génère des tensions inflationnistes chaque fois que l'appareil productif du pays produit déjà à peu près le maximum possible*. Bien entendu, lorsqu'un secteur d'activité manque de travail et ne produit, par exemple, que la moitié du maximum possible, il peut augmenter sa production sans payer d'heure supplémentaire, donc sans tension inflationniste sur le travail. D'où la définition :

On appelle **croissance potentielle** la croissance maximum soutenable pendant des mois ou des années sans générer de l'inflation. Il est fréquent que la **croissance effective** d'un pays soit inférieure à sa croissance potentielle, mais il arrive aussi qu'elle soit supérieure et accompagnée d'inflation : on dit alors que *l'économie s'emballé*.

Les notions de croissance potentielle et de croissance effective peuvent aussi s'appliquer à une entreprise, la croissance potentielle de la production étant la plus grande croissance que l'appareil productif de l'entreprise peut soutenir longtemps.

#### 1.4.2 De quoi dépendent les facteurs travail et capital dans un pays donné ?

Ces facteurs dépendent de beaucoup de variables. Exemples :

- Pour le facteur travail de la fonction de production, il y a dans un secteur d'activité d'un pays, ou dans son économie toute entière, une [relation entre taux de chômage et salaires](#).
- Pour le facteur capital, il y a une relation dans un pays entre taux d'intérêt et investissements : un taux d'intérêt élevé freine l'investissement des entreprises (en matériel, etc.) comme celui des particuliers (en immobilier, automobiles, etc.) ; en outre, un taux d'intérêt élevé détourne l'investissement du capital d'entreprise (actions, etc.) vers les obligations sans risque : nous l'avons vu [au début du tome 1 du "Cours d'économie pour citoyens qui votent"](#).

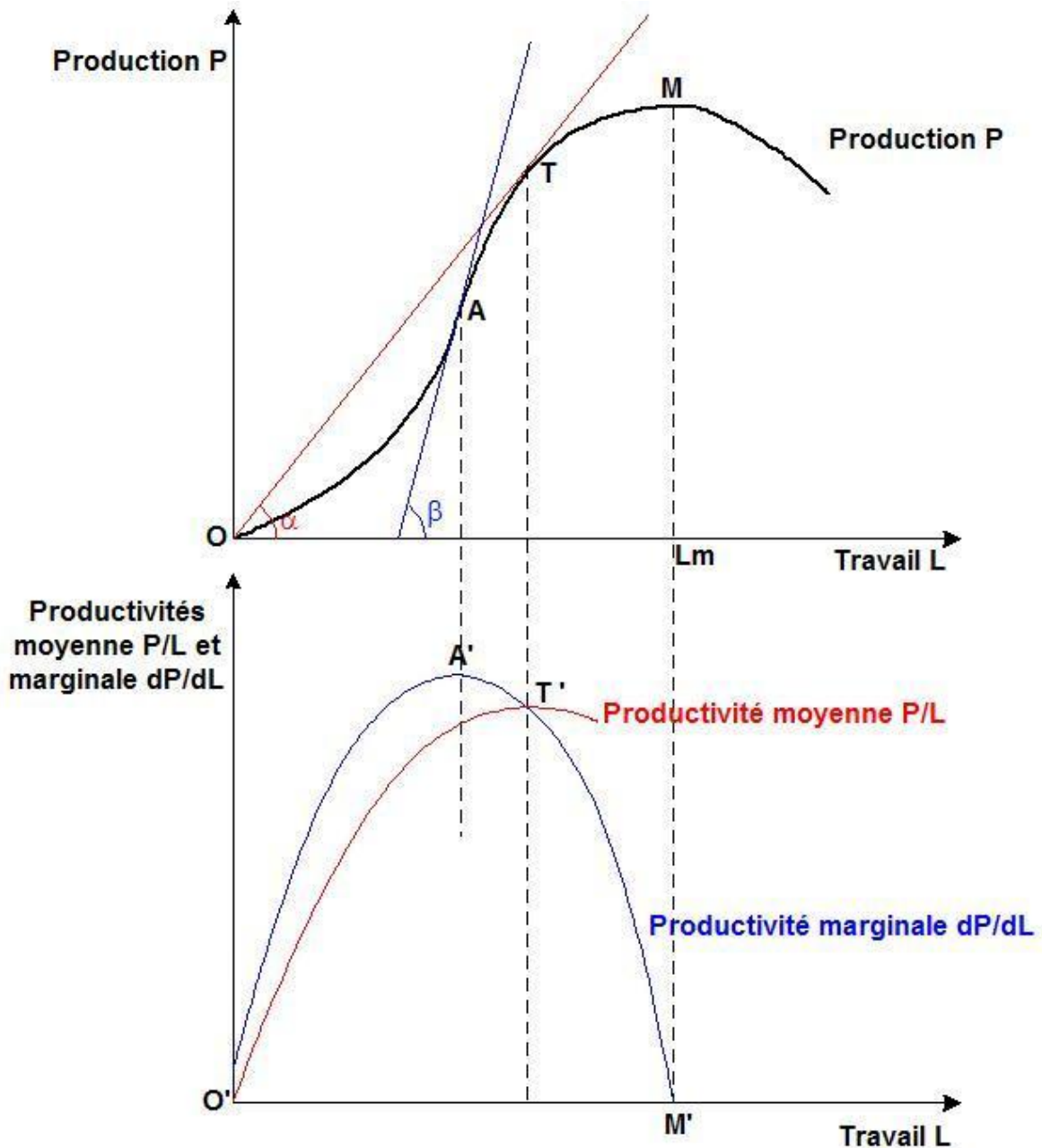
### 1.4.3 Croissance et chômage : rappels du tome 1 du "Cours d'économie pour citoyens qui votent"

La croissance de l'économie est la source principale de la création d'emplois, donc de la baisse du chômage. Mais il ne faut pas croire que la croissance peut supprimer le chômage, car il y a aussi, à l'échelle d'un pays, un taux de chômage minimum (dit « structurel ») dû pour l'essentiel à l'inadaptation des qualifications de ses travailleurs aux emplois que l'économie peut leur offrir.

Il peut aussi arriver qu'une croissance économique ne soit pas accompagnée de création nette d'emplois, et même qu'une période d'inflation (dite « stagflation ») se prolonge sans création d'emplois.

## 1.5 Productivité moyenne et productivité marginale

Supposons que lorsqu'on maintient constants les deux facteurs  $C = C_0$  et  $R = R_0$ , et qu'on fait varier de manière continue le facteur  $L$ , la production  $P = f(L, C_0, R_0)$  varie selon la courbe noire du diagramme ci-dessous.



Production P, productivités moyenne P/L et marginale dP/dL en fonction du facteur L

En un point quelconque de la courbe où le travail est  $L$  et la production correspondante  $P$ , le rapport  $P/L$  représente la productivité qu'on a pris l'habitude d'appeler **productivité moyenne**.

Au point O, lorsque  $L = 0$  et  $P = 0$ , en toute rigueur la productivité moyenne n'est pas définie ; on a toutefois considéré ici qu'elle était nulle, en supposant que lorsque  $L$  tend vers zéro, la productivité moyenne tend vers zéro beaucoup plus vite, la production s'annulant alors qu'il reste du personnel dans l'entreprise.

En un point quelconque, considérons la tangente à la courbe de production. Sa pente est la dérivée  $dP/dL$  de la fonction de production  $P = f(L, C_0, R_0)$  (en toute rigueur : sa dérivée partielle par rapport à  $L$ ,  $\partial P/\partial L$ ). Cette pente représente la limite du rapport de l'augmentation de production  $\Delta P$  à l'augmentation de travail  $\Delta L$  lorsque  $\Delta L$  tend vers 0 : on l'appelle **productivité marginale**.

La productivité moyenne est la tangente de l'angle  $\alpha$  : lorsque le travail  $L$  croît à partir de 0, elle démarre à la valeur 0 (par hypothèse, ici) puis passe par un maximum au point T. Si  $L$  continue à croître, la production atteint un maximum en M, lorsque  $L = L_m$ . Ce point s'interprète, par exemple, comme le fait qu'un ajout d'ouvriers au-delà de  $L_m$  fait que les ouvriers se gênent entre eux et la production décroît. La variation de la productivité moyenne est représentée par la courbe rouge.

La courbe bleue représente la variation de la productivité marginale, c'est-à-dire la fonction dérivée de  $f(L, C_0, R_0)$  par rapport à  $L$ . Elle démarre à une valeur, nulle ou non, puis passe par un maximum au point A, où la tangente à la courbe de production fait avec l'axe des  $L$  un angle  $\beta$  : A est le point de productivité marginale maximum, c'est-à-dire le point où un ajout de main d'œuvre  $\Delta L$  produit le maximum de production supplémentaire  $\Delta P$ . Lorsque  $L$  croît au-delà de A, la productivité marginale décroît et finit par s'annuler lorsqu'on atteint M, d'abscisse  $L = L_m$ .

En T, point de contact entre la courbe de production et sa tangente menée par O, la productivité moyenne est égale à la productivité marginale et  $\alpha = \beta$ . Les courbes rouge et bleue se coupent en T', de même abscisse que T.

### **Symétrie de la fonction de production par rapport à L et C**

On a raisonné ci-dessus à  $C$  constant, en faisant varier  $L$ . On peut bien entendu aussi raisonner à  $L$  constant en faisant varier  $C$ , et définir aussi une productivité moyenne  $P/C$  (production moyenne par unité de capital) et une productivité marginale  $dP/dC$ .

## **1.6 Elasticité**

L'influence de l'un des facteurs sur la production peut s'exprimer sous forme d'élasticité. On appelle **élasticité**  $\varepsilon_L$  de la fonction de production par rapport au facteur  $L$  la variation relative  $\Delta P/P$  de la production résultant d'une variation relative  $\Delta L/L$  du travail :

$$\varepsilon_L = (\Delta P/P) / (\Delta L/L) = (\Delta P/\Delta L) / (P/L), \text{ où } P/L \text{ est la productivité moyenne.}$$

Pour une valeur de  $L$  donnée, lorsque  $\Delta L$  tend vers zéro  $\Delta P/\Delta L$  tend vers la productivité marginale  $dP/dL$ . Donc **l'élasticité de la production est le quotient de la productivité marginale par la productivité moyenne**.

Bien entendu, on peut définir une élasticité par rapport à n'importe quel facteur.

## 1.7 Rendement de substitution

En un point de la courbe de production, la valeur de la dérivée  $dP/dL$  (pente de la tangente à la courbe) qui représente la productivité marginale peut aussi s'interpréter comme **le rendement** d'un accroissement du facteur L. Lorsque la fonction de production a l'allure ci-dessus, ce rendement commence par croître jusqu'en A, puis il décroît jusqu'à zéro. L'explication de cette décroissance du rendement est que l'accroissement de la main d'œuvre au-delà de A est de moins en moins rentable à *capital constant*. Cette décroissance est attribuée à la [« Loi des rendements décroissants »](#), qu'on retrouvera plus bas.

Il se peut qu'en augmentant le capital, c'est-à-dire par exemple l'outillage disponible, la productivité marginale continue à croître au-delà de A ; on voit ici l'intérêt de la notion d'intensité capitalistique, et la probabilité d'existence d'une intensité capitalistique optimale, correspondant par exemple à la quantité optimale d'outillage par ouvrier.

Exemple : dans l'atelier de réparation d'un grand concessionnaire automobile, il existe un nombre optimal de ponts élévateurs de voitures fonction du nombre de mécaniciens. S'il n'y a pas assez de ponts, des ouvriers peuvent être obligés d'attendre qu'un pont soit libre en perdant leur temps ; s'il y en a trop (ou trop peu d'ouvriers) du capital investi en ponts dort au lieu d'être rentable.

On peut donc imaginer un **rendement de substitution** du facteur travail par le facteur capital (« moins d'ouvriers et plus d'investissement »).

### Isoquants

D'un point de vue mathématique, à contexte  $R = R_0$  constant, la fonction de deux variables  $P = f(L, C, R_0)$  est représentée par une surface dans un espace à 3 dimensions rapporté aux axes L, C et P. Sur cette surface, les « courbes de niveau » où la quantité produite P est constante sont appelées *isoquants* (substantif analogue aux isobares de la météorologie). Elles représentent des combinaisons équivalentes des facteurs substituables L et C. Lorsqu'on se déplace le long d'une telle courbe on substitue du travail à du capital ou l'inverse sans que la production change : la différentielle totale de la production est donc nulle, ce qui s'écrit :

$$dP = (\partial P/\partial L)dL + (\partial P/\partial C)dC = 0$$

donc

$$dL/dC = -(\partial P/\partial C) / (\partial P/\partial L)$$

et donc  $dL/dC$  (qu'on appelle **taux marginal de substitution du travail par du capital**) est égal (au signe près) au rapport des productivités marginales  $\partial P/\partial C$  et  $\partial P/\partial L$ .

## 1.8 Influences réciproques des facteurs travail et capital

Les facteurs travail L et capital C sont des variables arbitraires et indépendantes : une entreprise peut choisir leurs valeurs comme elle veut. Mais cette indépendance n'entraîne pas l'absence d'influence du capital sur le travail : lorsque, pour une valeur donnée du travail L, la dérivée seconde  $(\partial/\partial C)(\partial P/\partial L)$  (c'est-à-dire  $\partial^2 P/\partial C \partial L$ ) est positive, la productivité de l'un des facteurs augmente avec l'emploi de l'autre. Il existe alors un choix optimal du couple de facteurs (L, C).

## 1.9 Productivité *globale* des facteurs de production

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la productivité par rapport à un seul facteur [6] à la fois, L ou C. Nous avons défini l'influence de chacun des facteurs par l'élasticité de la production par rapport à lui, élasticité égale au quotient de sa productivité marginale par sa productivité moyenne. Nous avons ainsi obtenu les élasticités  $\varepsilon_L$  et  $\varepsilon_C$ .

Nous pouvons nous attendre à ce qu'une fonction de production  $P(L, C)$  qui a des élasticités  $\varepsilon_L$  et  $\varepsilon_C$  présente une variation relative égale à la somme des effets de  $\varepsilon_L$  et  $\varepsilon_C$ , c'est-à-dire que  $\Delta P/P = \varepsilon_L \Delta L/L + \varepsilon_C \Delta C/C$ .

Exemple : si  $\varepsilon_L = 0.8$  et  $\varepsilon_C = 1.3$ , une augmentation simultanée de 2 % de la main d'œuvre L et de 3 % du capital C devrait produire une augmentation de  $0.02 \cdot 0.8 + 0.03 \cdot 1.3 = 0.055$ , c'est-à-dire 5.5 % de la production P.

On constate en général qu'il n'en est pas ainsi et qu'il existe une différence, résidu positif ou négatif, qu'on attribue en général au « progrès technique » même si d'autres facteurs peuvent jouer. Ce résidu est appelé **productivité globale des facteurs (PGF)**.

On le calcule en évaluant la différence entre variation totale de la fonction de production et la somme des variations des facteurs. Exemple tiré de [3] :

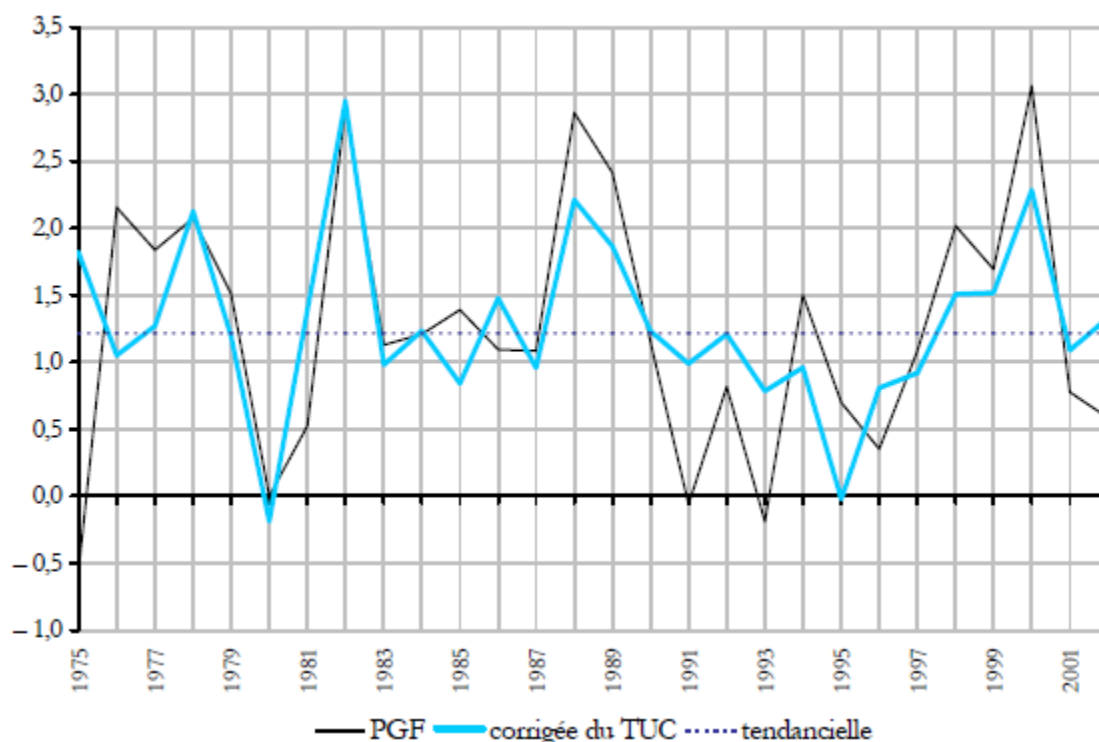
	1980-1990	1990-1995	1995-2002
Productivité par emploi [a]	2.69	1.55	0.88
Productivité horaire [b]	3.29	1.75	1.77
Contributions :			
Intensité capitalistique par emploi [c]	1.29	1.68	0.57
Intensité capitalistique par heure [d]	1.49	1.74	0.87
Durée du travail [e]	-0.40	-0.14	-0.59
PGF [f]	1.80	0.01	0.90

### Décomposition de la croissance de la productivité en France en % dans le secteur marchand sur longue période

On vérifie les deux égalités comptables :  $[a] = [c] + [e] + [f]$  et  $[b] = [d] + [f]$

Attention : la définition de la PGF n'a pas besoin des élasticités ; ce n'est qu'une différence entre la productivité globale constatée et la somme des productivités des divers facteurs de production [6].

Voici selon [5] page 4 l'évolution de la PGF horaire de l'économie française de 1975 à 2002 :



Les auteurs du graphique précisent :

*"Comme la PGF présente un profil fortement cyclique dû à une certaine inertie des facteurs de production, on a estimé une tendance annuelle dégagée de ces influences cycliques, en effectuant une régression des gains de PGF constatés sur la variation du taux d'utilisation des capacités de production (TUC) sur la période 1975-2002. Le TUC fournit en effet un indicateur du degré de pression exercée par la demande globale sur les capacités de production. Sur la période d'étude, il apparaît que la PGF peut être modélisée comme une tendance stable, affectée par ailleurs par des fluctuations cycliques."* [Cette tendance stable est représentée par la droite horizontale en pointillés à 1.2 % de croissance annuelle].

Pour une discussion de la manière dont la productivité intervient dans la croissance du PIB, voir "[Variation du PIB en volume selon divers paramètres](#)".

## 1.10 Rendements d'échelle

Une question naturelle se pose : est-ce que le fait de multiplier par un coefficient  $m > 1$  chacun des facteurs de production [6] multiplie la production par le même coefficient  $m$  ? C'est là une question d'échelle. Il y a trois cas :

- *La production est aussi multipliée par  $m$  : les rendements sont alors constants.* C'est le cas, par exemple, lorsque le capital représente une dépense d'outillage

constante par ouvrier. Si on double le nombre d'ouvriers, il faut aussi doubler le capital investi en outillage et la production doublera.

- *La production est multipliée par  $n < m$*  : les rendements sont alors décroissants, la production est moins efficace ; il est fréquent aujourd'hui que des petites entreprises très spécialisées soient plus efficaces dans leur métier que des grandes entreprises.
- *La production est multipliée par  $n > m$*  : les rendements sont croissants, il y a une économie d'échelle.

### 1.10.1 Fonctions de production homogènes

En mathématiques, une fonction de plusieurs variables  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est dite *homogène et de degré  $d$*  si une multiplication simultanée de toutes ses variables par un même coefficient  $m$  multiplie la valeur de la fonction par  $m^d$ .

Exemple : la fonction  $z(x, y) = 0.8x^2 - 3xy$  est homogène et de degré 2.

### 1.10.2 Exemple : fonction de Cobb-Douglas

Considérons la fonction de production dite de **Cobb-Douglas**, définie par

$$P = a L^{1-k} C^k$$

où  $a$  et  $k$  sont des nombres constants.

Cette fonction est homogène et de degré 1, car si on remplace  $L$  par  $mL$  et  $C$  par  $mC$ , la valeur de la fonction devient  $P = a m^{1-k} L^{1-k} m^k C^k = m a L^{1-k} C^k$

Calculons l'élasticité de cette fonction par rapport au capital  $C$ . Il vient :

$$\epsilon_C = (\partial P/P) / (\partial C/C) = (\partial P/\partial C) / (P/C) = (a k L^{1-k} C^{k-1}) / (P/C) = k$$

De même, l'élasticité par rapport au travail  $L$  est  $1 - k$ .

Donc avec une production qui suit le modèle de Cobb-Douglas :

- Si le capital augmente de 1 %, la production augmente de  $k$  %;
- Si le travail augmente de 1 %, la production augmente de  $(1 - k)$  %;
- Si on double à la fois le travail et le capital, la production double.

## 1.11 Conclusions sur la fonction de production

Les raisonnements qui précèdent mènent aux conclusions suivantes :

- Un pays riche en main d'œuvre, même bien formée et pas trop chère, mais pauvre en capital, ne peut être compétitif et se développer que dans des secteurs d'activité où l'intensité capitaliste optimale est faible.

Il trouvera ce capital auprès d'investisseurs étrangers s'il adopte une politique favorable à ces investissements (exemple : rapatriement facile des bénéfices et impôts réduits) et si sa stabilité politique est suffisante.

- Un pays riche en capital mais pauvre en main d'œuvre (exemple : la Norvège, avec ses revenus pétroliers considérables et sa population modeste) a tout intérêt à développer des activités à forte intensité capitaliste... ou à placer son argent à l'étranger si son économie ne peut l'absorber.

- Le capital a un coût, fortement corrélé au taux d'intérêt de référence fixé par sa banque centrale. Si ce coût est élevé, les entreprises ont du mal à justifier le financement de leur développement par emprunt.

## 2. La fonction de coût

Une entreprise ne maîtrisant pas en général le prix de marché [du fait de la concurrence](#), pour gagner le maximum d'argent elle doit produire le moins cher possible. Nous étudions dans cette section la fonction économique de coût, qui exprime la variation du coût total C de la production en fonction de la quantité produite Q.

En général, le coût total C comprend des *coûts fixes*  $C_f$  (intérêt des fonds empruntés, loyer, assurance, personnel administratif, etc.) et des *coûts variables* (main d'œuvre, matières premières, etc.) qui sont une fonction de Q que nous appellerons  $f(Q)$  :

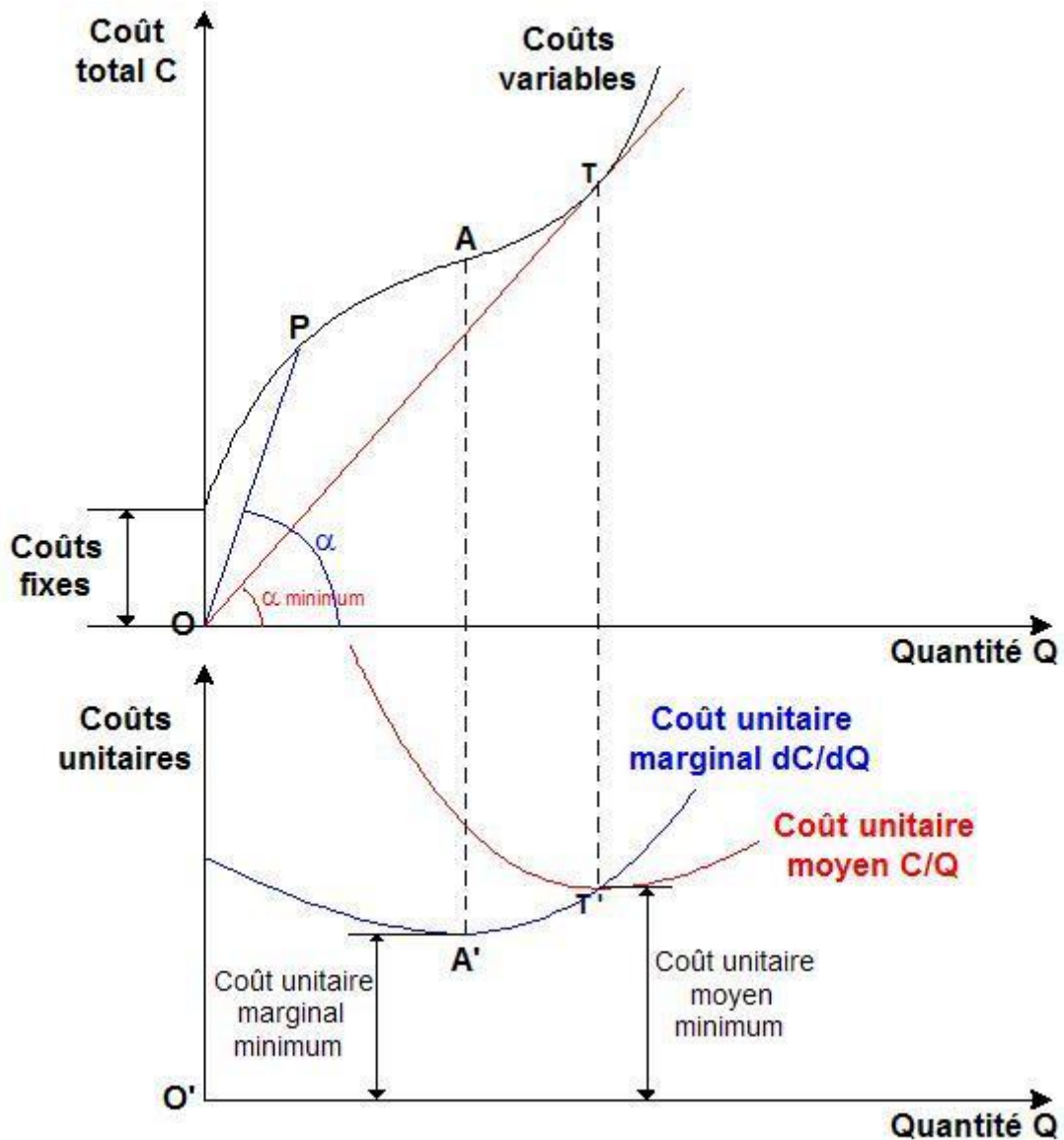
$$C = C_f + f(Q)$$

### 2.1 Fonctionnement de l'entreprise pendant une période courte

Dans un premier temps, nous allons supposer que le capital et l'organisation du travail de l'entreprise ne changent pas : nous raisonnerons sur le fonctionnement de l'entreprise pendant une période suffisamment courte pour que cela soit vrai. Pendant cette période, les coûts fixes sont donc supposés constants.

Le graphique ci-dessous représente la variation du coût total C en fonction de la quantité Q et des coûts fixes. On a supposé que lorsque Q croît à partir de zéro, C croît mais de moins en moins vite jusqu'en un point A, puis de plus en plus vite. Cette loi de variation de C s'explique de la manière suivante :

- Jusqu'en A, les moyens de l'entreprise (équipement, capital, organisation) sont utilisés de manière normale.
- Au-delà de A, ces moyens sont sur-utilisés : l'entreprise manque peut-être de matériel par rapport à son nombre d'employés, ou ceux-ci doivent être payés en heures supplémentaires plus chères, etc.



**Coût total C et coûts unitaires  
en fonction de la quantité produite Q**

## 2.1.1 Coûts unitaires marginal et moyen

### 2.1.1.1 Coût unitaire marginal

On appelle *coût unitaire marginal* le coût de la production d'une unité supplémentaire lorsqu'on en produit déjà Q. Ce coût est donc la valeur de la dérivée  $dC/dQ$ , c'est-à-dire  $df(Q)/dQ$ .

$$dC/dQ = df(Q)/dQ$$

Sur le graphique ci-dessus, la dérivée  $dC/dQ$  démarre à une valeur non nulle lorsque  $Q = 0$ , puis diminue jusqu'au point A où elle passe par un minimum. En A, la concavité de la courbe  $f(Q)$ , précédemment dirigée vers le bas, s'inverse et la pente de  $f(Q)$  passe par un minimum (qui n'est pas nul et ne peut jamais l'être !) On a

représenté à la partie inférieure du graphique, la courbe  $df(Q)/dQ$ . En  $A'$ , projection de  $A$ , la tangente à cette courbe est horizontale et la hauteur du point  $A'$  est le coût unitaire marginal minimum.

### 2.1.1.2 Coût unitaire moyen

On appelle *coût unitaire moyen* le rapport  $C/Q$ . Il est représenté par la tangente de l'angle  $\alpha$  que fait la droite joignant un point quelconque  $P$  de la courbe de  $C$  avec l'axe horizontal des quantités. Cet angle passe par un minimum lorsque  $P$  est le point de contact  $T$  de la courbe de  $C$  avec la tangente menée par  $O$ . En  $T$ , le coût unitaire marginal est égal au coût unitaire moyen, qui est minimum en ce point.

En  $T'$ , projection de  $T$  et intersection des courbes de coût unitaire marginal et moyen, la courbe représentant le coût unitaire moyen a une tangente horizontale. Le coût unitaire moyen, infini pour  $Q = 0$ , passe par un minimum lorsque  $Q = Q(T)$ .

### 2.1.2 Loi des rendements décroissants

Lorsque le point  $P$  parcourt la courbe de  $C$  en s'éloignant de  $O$ , jusqu'en  $T$  le coût unitaire marginal est inférieur au coût unitaire moyen : *chaque unité supplémentaire produite coûte moins cher que la moyenne des unités déjà produites*. Mais au-delà de  $T$ , chaque unité supplémentaire est plus chère que le coût moyen de ce qui est déjà produit. On dit alors que le rendement est décroissant au-delà de  $T$ , et ce comportement est appelé « Loi des rendements décroissants ».

L'explication de cette loi a été donnée [ci-dessus](#) : au-delà de  $A$ , l'entreprise manque de moyens matériels, financiers ou organisationnels pour que le coût unitaire marginal puisse continuer à décroître. Chaque unité supplémentaire produite coûte alors plus cher que la précédente. Croissant jusqu'en  $A$ , le rendement de la production décroît ensuite. Mais du point de vue du coût total, le seul qui compte pour le résultat de l'entreprise, on peut dire que la situation optimale est en  $T$  : c'est en ce point que la production justifie le mieux les coûts fixes.

## 2.2 Fonctionnement de l'entreprise pendant une période longue

La [loi des rendements décroissants](#), valable pendant une période courte, ne l'est plus si on suppose que les moyens de l'entreprise peuvent évoluer. Considérons donc à présent une période suffisamment longue pour que l'entreprise puisse faire varier ses moyens financiers (capital, emprunts...), acheter ou moderniser son équipement et faire évoluer son organisation.

A chaque nouveau contexte de fonctionnement correspond un nouvel ensemble de [courbes de coûts](#) et de [courbes de productivité](#). Une entreprise qui grandit peut ainsi bénéficier d'économies d'échelle. Mais plus une entreprise est grande, plus elle a immobilisé de capital et d'équipements, plus ses coûts fixes sont élevés et plus son organisation est rigide. En cas de conjoncture difficile, plus une entreprise est grande plus elle a de mal à réduire sa production pour diminuer ses coûts, et ce manque de souplesse est de plus en plus insupportable au XXI<sup>e</sup> siècle, où les situations de marché évoluent plus vite que jamais.

On observe donc une tendance des entreprises à se subdiviser en unités de production plus petites, mettant en commun certains moyens et échangeant des produits et services. La croissance de l'entreprise peut alors profiter de contextes

nationaux devenus plus favorables, par exemple lorsqu'un pays de l'Europe Centrale a main d'œuvre bon marché rejoint le Marché commun : elle y installera une filiale pour produire des unités supplémentaires, sans nécessairement supprimer de la production dans ses sites existants. Exemples d'entreprises pratiquant cette politique : PSA Peugeot-Citroën et Renault.

### 3. Profit maximum - Offre optimale

#### Hypothèses

- Considérons une entreprise qui ne produit que sur commande, qui vend donc tout ce qu'elle produit.
- Soit  $x$  la quantité vendue d'un certain article, au prix unitaire de vente  $p$  *imposé par le marché*.  
Puisque la vente de chaque article rapporte  $p$  euros,  $p$  est *la recette marginale*.
- Soit  $C(x)$  la fonction de coût de l'article (fonction qui comprend un coût fixe et un coût variable) et soit  $C'(x)$  sa dérivée par rapport à la quantité  $x$ . Nous supposons  $C(x)$  connue et dérivable deux fois.  
Nous avons vu ci-dessus que  $C'(x)$  est *le coût marginal*.

#### Profit

Avec les hypothèses ci-dessus, le profit  $Y$  de l'entreprise lorsqu'elle vend  $x$  articles au prix unitaire  $p$  est :

$$Y(x) = p \cdot x - C(x)$$

Lorsque  $x$  varie, le profit  $Y(x)$  est maximum lorsque deux conditions sont remplies :

1. La dérivée de  $Y(x)$  par rapport à  $x$  est nulle, ce qui s'écrit :

$$p = C'(x)$$

2. La dérivée seconde de  $Y(x)$  par rapport à  $x$  est négative, c'est-à-dire que la concavité de la courbe  $Y(x)$  est dirigée vers le bas, condition indispensable pour qu'il s'agisse d'un maximum. En appelant  $C''(x)$  la dérivée de  $C'(x)$  par rapport à  $x$ , cela s'écrit :

$$C''(x) < 0$$

## Conclusion

**Le profit de l'entreprise est maximal compte tenu de ses coûts et du prix imposé par le marché lorsqu'elle produit une quantité d'articles telle que le coût marginal d'un article est égal au prix de vente**

### Représentation graphique de l'offre optimale

Représentons ci-dessous en bleu la fonction de coût unitaire marginal en fonction de la quantité produite et vendue  $Q$ .

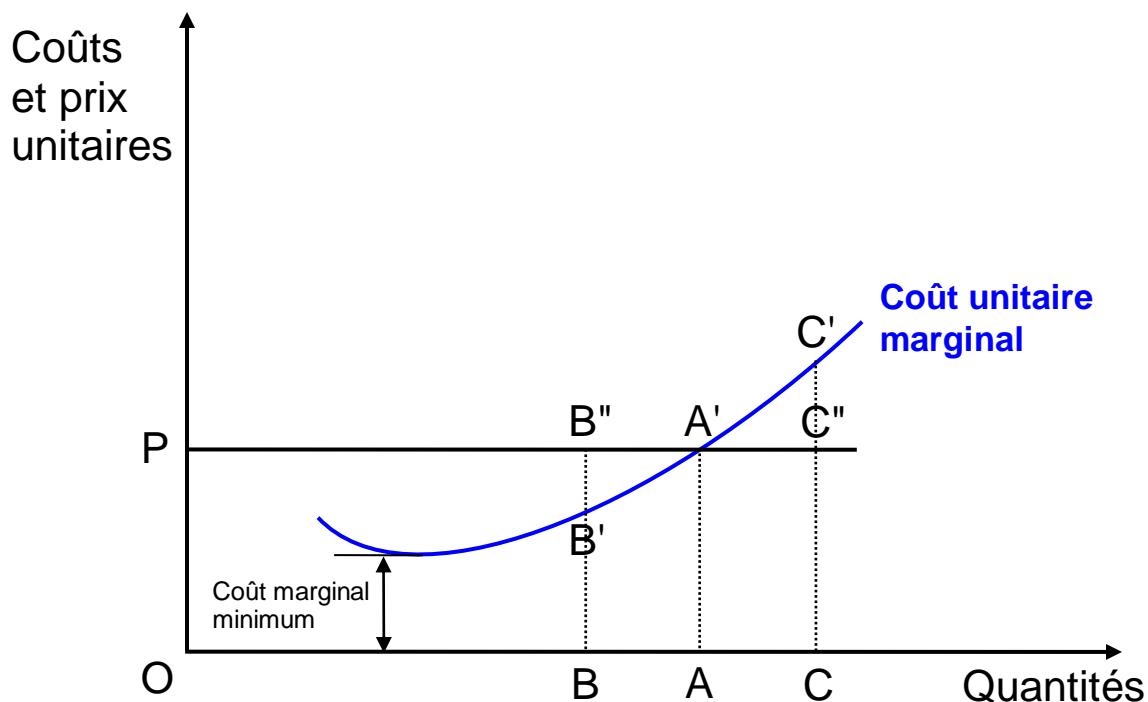
La hauteur de la droite horizontale d'ordonnée  $P$  (qui coupe la courbe bleue en  $A'$ ) représente le prix du marché et le coût marginal de production de la quantité  $OA$ .

Si la quantité vendue est représentée par  $OA$ , l'entreprise a un profit maximum. Au prix de marché  $P$ , la quantité qu'elle doit fabriquer et vendre est  $OA$ . Son offre (quantité  $OA$  au prix  $P$ ) est alors optimale.

Si la quantité vendue est représentée par  $OB < OA$ , l'entreprise a un manque à gagner (par rapport au profit maximum) représenté par l'aire du triangle  $B'B'A'$ , dont le côté  $B'A'$  est une portion de la courbe bleue ; l'entreprise ne vend pas assez au prix  $P$  pour couvrir ses coûts variables.

Si la quantité vendue est représentée par  $OC > OA$ , l'entreprise a un manque à gagner (par rapport au profit maximum) représenté par l'aire du triangle  $C'C'A'$ , dont le côté  $C'A'$  est une portion de la courbe bleue ; l'entreprise vend trop d'articles au prix  $P$ , la quantité  $OC - OA$  coûtant plus cher que ce qu'elle rapporte.

Enfin, si le prix du marché  $P$  ne permet même pas de couvrir le coût unitaire marginal minimum, l'entreprise ne peut que perdre de l'argent : elle doit cesser de produire cet article et se reconvertir.



### 3.1 Conséquences d'une baisse des prix de marché

Dans la plupart des activités la productivité croît d'une année sur l'autre, parce qu'on apprend à travailler mieux ou on utilise des matériels plus performants. C'est ainsi qu'[en France la productivité moyenne croît en ce moment au rythme de 1.6 % par an](#).

Cette croissance de la productivité se produisant dans un marché très concurrentiel, il y a une tendance naturelle à la baisse des prix (exemples : prix des produits électroniques comme les lecteurs de CD, les PC, etc. D'après [4], l'ensemble des produits manufacturés achetés par les Français a baissé en moyenne de 0.6 % entre septembre 2004 et septembre 2005.) [La hausse moyenne des prix à la consommation qu'on constate continuellement \(et qu'on baptise à tort « inflation »\) s'explique par un excès de la demande sur l'offre](#). En France, sur la même période, elle a été de 2.2 %, ou de 1.1 % si l'on fait abstraction de l'énergie (pétrole, gaz) [4]. Enfin, chaque mois il y a 15 % des prix qui changent dans la zone euro et 25 % aux Etats-Unis. La concurrence est si vive que la Banque de France note que 40 % des changements de prix sont des baisses !

Malgré la hausse des prix reflétée par l'indice de l'INSEE, la tendance à la baisse des prix existe pour de nombreux produits. Nous allons maintenant voir ses conséquences.

Si le prix unitaire de vente imposé par le marché  $p$  baisse à une valeur  $p_2 < p$ , l'entreprise doit ajuster sa production  $x$  à une nouvelle valeur  $x_2$  et/ou modifier sa fonction de coût  $C(x)$  pour respecter la condition de maximum de profit  $p_2 = C'(x_2)$ . Compte tenu des coûts fixes  $C_f$ , l'entreprise doit faire baisser ses coûts unitaires

variables, en jouant sur les approvisionnements (prix payés aux fournisseurs) et/ou en augmentant la productivité du travail.

Elle peut jouer sur les approvisionnements en renégociant avec ses fournisseurs, ou en trouvant des fournisseurs moins chers. Elle peut augmenter la productivité du travail en baissant les salaires et primes, en délocalisant, ou en sous-traitant à des entreprises qui peuvent fabriquer moins cher.

La quantité à fabriquer  $x_2$  pour vendre au nouveau prix  $p_2$  en maximisant le profit peut être inférieure ou supérieure à la quantité précédente  $x$ . C'est ainsi que la baisse continue du prix des lecteurs de CD s'est traduite par l'explosion des ventes de certains fournisseurs et l'arrêt de production de certains autres, qui n'ont pu suivre.

L'évolution des quantités, l'introduction de délocalisations ou de sous-traitances entraînent en général des ajustements de l'emploi. En tout état de cause :

- Une entreprise ne peut pas payer un salarié (charges comprises) plus que sa production peut rapporter lors de la vente. *Le prix de marché impose donc une limite supérieure aux salaires.*
- Un travailleur ne peut accepter un salaire qui ne lui permet pas de vivre décemment. Il préfère souvent rester chômeur plutôt que travailler pour à peine plus que les allocations de chômage. *Il y a donc aussi une limite inférieure aux salaires.*

## Conclusions

Il peut donc arriver que le prix de marché soit incompatible avec la poursuite d'activité, les salaires correspondants étant trop faibles.

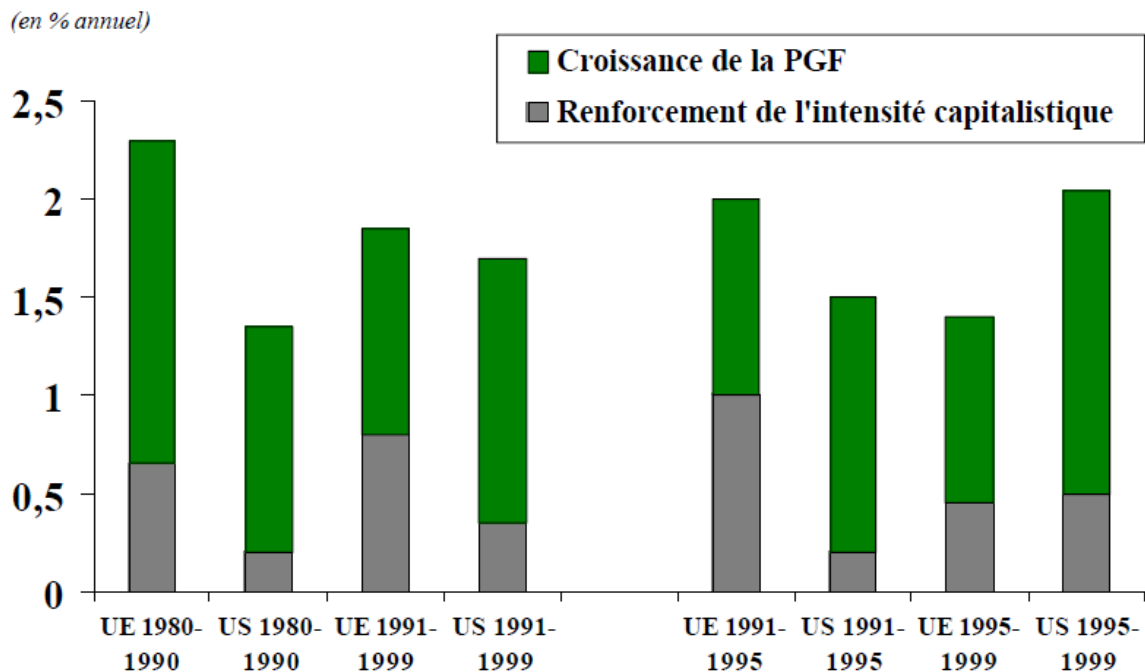
Si une loi impose un salaire minimum et/ou une durée de travail maximum, conditions telles que le coût de production correspondant soit incompatible avec les prix de marché, il y a forcément cessation d'activité. Cela s'est produit du fait des "35 heures" dans certaines entreprises ; d'autres ont dû donner le choix à leurs salariés entre travailler plus d'heures sans gagner plus (Hewlett-Packard à Grenoble, Bosch à Vénissieux, SEB à Vecoux, MT Packaging à Challes et TRW à Bouzonville) ou subir des délocalisations entraînant des licenciements.

[Daniel MARTIN](#)

## 4. Références

[1] Rapport du Sénat sur les déterminants de l'investissement, par Joseph KERGUERIS (29/10/2002) <http://www.senat.fr/rap/r02-035/r02-0351.pdf>

Voici un graphique extrait de ce rapport qui montre l'effet prépondérant du facteur « R » (PGF) dans la croissance de la productivité horaire du travail dans l'Union européenne et aux Etats-Unis :



[2] Analyses Economiques n° 44 (juillet 2004), édité par le Ministère de l'économie et des finances. Selon la page 4 de ce document, voici les intensités capitalistes (définies comme le rapport entre les immobilisations corporelles et la valeur ajoutée) de quelques secteurs d'activité :

Composants électroniques	Métallurgie	Industrie textile	Commerce de détail	Transports	Conseil assistance	Commerce de gros
306 %	159 %	138 %	96 %	63 %	13 %	1 %

#### Intensités capitalistes selon le secteur d'activité

[3] Etude de la Banque de France "Un siècle de productivité globale des facteurs en France" [http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu139\\_1.pdf](http://www.banque-france.fr/fr/publications/telechar/bulletin/etu139_1.pdf)

[4] *Le Figaro économie* du 07/11/2005, article "L'inflation est soluble dans la mondialisation".

[5] Ministère de l'économie - "La croissance potentielle de l'économie française de moyen-long terme" - (janvier 2004) <http://www.cor-retraites.fr/IMG/pdf/doc-363.pdf>

[6] Facteurs de production : ce sont les moyens utilisés pour produire : main d'œuvre, matériel, capital, matières premières, etc.

[Retour page d'accueil](#)